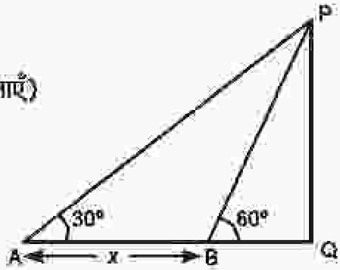


ΔPAB में

$\angle PAB = \angle APB$

अतः $PB = AB = x$ (बराबर कोणों की सम्मुख भुजाएँ)

समकोण ΔPQB में,

$\cos 60° = \frac{BQ}{PB}$

$\frac{1}{2} = \frac{BQ}{x}$

या $BQ = \frac{x}{2}$

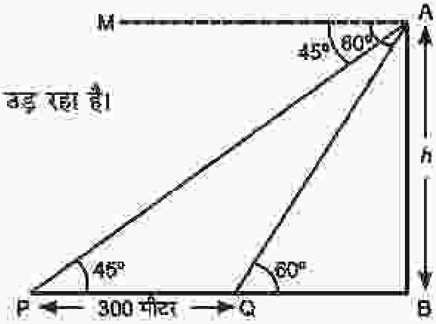
चूकि $AB = x$ दूरी तय करने में नाव को लगा समय $= 4$ मिनट

अतः $BQ = \frac{x}{2}$ दूरी तय करने में नाव को लगा समय $= \frac{4}{2} = 2$ मिनट

अतः नाव को इमारत के पास किनारे तक पहुँचने में 2 मिनट लगेगी। उत्तर

6. एक वायुयान दो मकानों के ऊपर से उड़ रहा है, जिनके बीच की न्यूनतम दूरी 300 मीटर है। यदि किसी समय वायुयान से एक ही दिशा में दोनों मकानों के अवनमन कोण 45° व 60° हों, तो ज्ञात कीजिए वायुयान कितनी ऊँचाई पर उड़ रहा है।

हल– माना P व Q दो मकान हैं, जिनके बीच की दूरी $PQ = 300$ मीटर, A किसी क्षण वायुयान की स्थिति है। जिससे मकान P व Q के अवनमन कोण क्रमशः $\angle MAP = 45°$ तथा $\angle MAQ = 60°$ है।



अतः $\angle APB = \angle MAP = 45°$

तथा $\angle AQB = \angle MAQ = 60°$

माना वायुयान $AB = h$ मीटर ऊँचाई पर उड़ रहा है।

$\therefore$ समकोण ΔABQ में,

$\tan 60° = \frac{AB}{QB}$

या $\sqrt{3} = \frac{h}{QB}$

या $QB = \frac{h}{\sqrt{3}}$ ....(1)

तथा समकोण ΔABP में,

$\tan 45° = \frac{AB}{PB}$

$1 = \frac{h}{PQ + QB}$ $[\because PB = PQ + QB]$

या $1 = \frac{h}{300 + QB}$

या $300 + QB = h$

या $300 + \frac{h}{\sqrt{3}} = h$ (समीकरण 1 से)

या $300 = h - \frac{h}{\sqrt{3}}$

या $300 = \frac{(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}} h$

या $h = \frac{300\sqrt{3}}{(\sqrt{3}-1)} = \frac{300\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{300(3+\sqrt{3})}{3-1} = \frac{300(3+\sqrt{3})}{2}$

$= 150\,(3+\sqrt{3})$ **मीटर** उत्तर

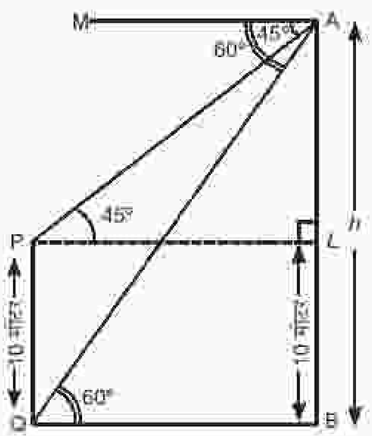
7. सड़क के एक ओर स्थित किसी मकान के सड़क के दूसरी ओर स्थित मीनार के शिखर से छत तथा आधार के अवनमन कोण क्रमशः 45° व 60° हैं, यदि मकान की ऊँचाई 10 मीटर हो, तो मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल– माना $AB = h$ मीटर ऊँची एक मीनार सड़क के एक ओर स्थित है तथा $PQ = 10$ मीटर ऊँचाई का सड़क के दूसरी ओर स्थित कोई मकान इस प्रकार है कि मीनार के शिखर से इसके छत व आधार के अवनमन कोण क्रमशः $\angle MAP = 45°$ तथा $\angle MAQ = 60°$ हैं।

PL भुजा AB पर लम्ब डाला।

अतः $\angle APL = \angle MAP = 45°$ (एकान्तर कोण)

तथा $\angle AQB = \angle MAQ = 60°$ (एकान्तर कोण)



$LB = PQ = 10$ मीटर

तथा $PL = QB$

समकोण ΔALP में,

$\tan 45° = \frac{AL}{PL}$

या $1 = \frac{AL}{PL}$

या $PL = AL$

या $QB = AL$ ....(1)

समकोण ΔABQ में,

$\tan 60° = \frac{AB}{QB}$

या $\sqrt{3} = \frac{AL+LB}{AL}$ $[\because AB = AL + LB]$

या $\sqrt{3} = \frac{AL+10}{AL}$

या $\sqrt{3}AL = AL + 10$

या $\sqrt{3}AL - AL = 10$

या $(\sqrt{3}-1)AL = 10$

या $AL = \frac{10}{(\sqrt{3}-1)} = \frac{10(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{10(\sqrt{3}+1)}{3-1} = \frac{10(\sqrt{3}+1)}{2} = 5(\sqrt{3}+1)$

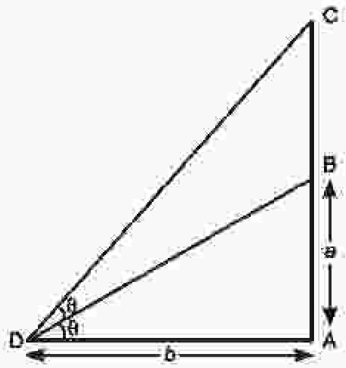
मीनार की ऊँचाई $h = AB = AL + LB = 5(\sqrt{3}+1) + 10 = 5\sqrt{3} + 5 + 10 = 5\sqrt{3} + 15$

$= 5(\sqrt{3}+3) = 5(1.732 + 3) = 5 \times 4.732 = 23.66$ मीटर

अतः मीनार की ऊँचाई **23.66 मीटर** है। उत्तर

8. चित्र में, क्षैतिज समतल पर खड़ी मीनार के दो भाग AB तथा BC हैं। $AB = a$ मीटर है। उसी क्षैतिज समतल पर कोई बिन्दु D है जिस पर BC तथा AB दोनों भाग समान कोण θ अन्तरित करते हैं। यदि $AD = b$ मीटर, तब सिद्ध कीजिए— $BC = \dfrac{a(b^2+a^2)}{(b^2-a^2)}$ मीटर

हल– दिए गए चित्रानुसार,



समकोण ΔBAD में,

$$\tan\theta = \frac{AB}{AD}$$

या $$\tan\theta = \frac{a}{b}$$

तथा समकोण ΔCAD में,

$$\tan(\theta+\theta) = \frac{AC}{AD}$$

या $$\tan 2\theta = \frac{AB+BC}{AD}$$

या $$\tan 2\theta = \frac{a+BC}{b}$$

या $$\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{a+BC}{b}$$

या $$\frac{2\times\frac{a}{b}}{1-\left(\frac{a}{b}\right)^2} = \frac{a+BC}{b}$$ [समीकरण (1) से]

या $$\frac{2\times\frac{a}{b}}{1-\frac{a^2}{b^2}} = \frac{a+BC}{b}$$

या $$\frac{\frac{2a}{b}}{\frac{b^2-a^2}{b^2}} = \frac{a+BC}{b}$$

या $$\frac{2ab^2}{b(b^2-a^2)} = \frac{a+BC}{b}$$

या $$\frac{2ab^2}{b^2-a^2} = a+BC$$

या $$a+BC = \frac{2ab^2}{b^2-a^2}$$

$$BC = \frac{2ab^2}{b^2 - a^2} - a$$

या $BC = \frac{2ab^2 - ab^2 + a^3}{b^2 - a^2}$

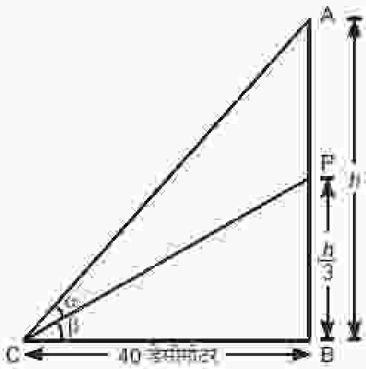
या $BC = \frac{ab^2 + a^3}{b^2 - a^2} = \frac{a(b^2 + a^2)}{(b^2 - a^2)}$ **मीटर** **इति सिद्धम्**

9. ऊर्ध्वाधर खम्भा (जो 100 डेसी मीटर से अधिक लम्बा है) दो भागों में बँटा है, जिसमें नीचे का भाग उसकी कुल लम्बाई का $\frac{1}{3}$ है। यदि खम्भे की जड़ से 40 डेसीमीटर दूर एक स्थान पर उसका ऊपरी भाग कोण α अन्तरित करता है जबकि $\tan\alpha = \frac{1}{2}$, तो खम्भे की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल– चित्र में, माना $AB = h$ डेसीमीटर लम्बाई का खम्भा है। जिसके दो भाग AP व PB हैं, तथा $PB = \frac{1}{3}h$ डेसी मीटर। खम्भे की जड़ B से 40 डेसीमीटर दूरी पर स्थित बिन्दु C पर खम्भे के ऊपरी भाग AP द्वारा अन्तरित कोण α है।

माना खम्भे के निचले भाग PB द्वारा बिन्दु C पर अन्तरित कोण β है। दिया है— $\tan\alpha = \frac{1}{2}$

अतः समकोण ΔPBC में,



$$\tan\beta = \frac{PB}{BC}$$

या $\tan\beta = \frac{\frac{h}{3}}{40}$

या $\tan\beta = \frac{h}{120}$ ....(1)

तथा समकोण ΔABC में,

$\tan\angle BCA = \frac{AB}{BC}$

या $\tan(\alpha + \beta) = \frac{h}{40}$

या $\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{h}{40}$

या $\frac{\frac{1}{2} + \frac{h}{120}}{1 - \frac{1}{2} \times \frac{h}{120}} = \frac{h}{40}$

या $\frac{\frac{60 + h}{120}}{1 - \frac{h}{240}} = \frac{h}{40}$

या $\dfrac{\dfrac{60+h}{120}}{\dfrac{240-h}{240}} = \dfrac{h}{40}$

या $\dfrac{240(60+h)}{120(240-h)} = \dfrac{h}{40}$

या $\dfrac{2(60+h)}{240-h} = \dfrac{h}{40}$

या $80(60+h) = 240h - h^2$

या $4800 + 80h = 240h - h^2$

या $h^2 - 240h + 80h + 4800 = 0$

या $h^2 - 160h + 4800 = 0$

या $h^2 - 120h - 40h + 4800 = 0$

या $h(h-120) - 40(h-120) = 0$

या $(h-120)(h-40) = 0$

अब, यदि $h - 120 = 0$ तो $h = 120$ डेसीमीटर

तथा यदि $h - 40 = 0$ तो $h = 40$ डेसीमीटर (जो अमान्य है)

अतः खम्भे की लम्बाई (h) = **120 डेसीमीटर** उत्तर

10. एक वायुयान सीधी सड़क के अनुदिश सड़क पर स्थित एक स्थान की ओर क्षैतिज दिशा में, 600 किमी/घण्टा की गति से उड़ रहा है। उस स्थान पर उसका उन्नयन कोण 30° और 12 सेकण्ड बाद 60° हो जाता है। वायुयान की ऊर्ध्वाधर ऊँचाई कीजिए।

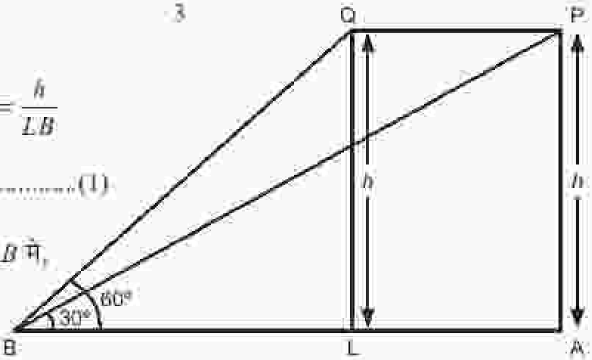
हल– माना सड़क AB पर स्थित बिन्दु B के अनुदिश ऊँचाई h मीटर पर एक वायुयान उड़ रहा है। वायुयान की प्रथम स्थिति P से बिन्दु B का उन्नयन कोण 30° तथा 12 सेकण्ड बाद वायुयान की द्वितीय स्थिति Q से बिन्दु B का उन्नयन कोण 60° है।

चित्र से,

$QL = PA = h$ मीटर तथा $PQ = AL$

वायुयान की चाल 600 किमी/घण्टा $= 600 \times \dfrac{5}{18}$ मीटर/सेकण्ड $= \dfrac{500}{3}$ मीटर/सेकण्ड

अतः दूरी $PQ = AL$ = चाल × समय $= \dfrac{500}{3} \times 12 = 2000$ मीटर



$\therefore$ समकोण ΔQLB में,

$\tan 60° = \dfrac{QL}{LB} \Rightarrow \sqrt{3} = \dfrac{h}{LB}$

या $LB = \dfrac{h}{\sqrt{3}}$ ....(1)

तथा समकोण ΔPAB में,

$\tan 30° = \dfrac{PA}{AB}$

या $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{h}{AL + LB}$ $[\because AB = AL + LB]$

या $h = \frac{1}{\sqrt{3}}(AL + LB)$

या $h = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(2000 + \frac{h}{\sqrt{3}}\right)$

या $h = \frac{2000}{\sqrt{3}} + \frac{h}{3}$

या $h - \frac{h}{3} = \frac{2000}{\sqrt{3}}$

या $\frac{3h - h}{3} = \frac{2000}{\sqrt{3}}$

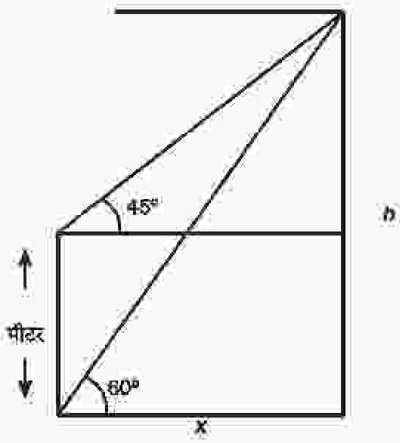
या $\frac{2h}{3} = \frac{2000}{\sqrt{3}}$

या $h = \frac{2000 \times 3}{2 \times \sqrt{3}} = 1000\sqrt{3}$ मीटर

अतः वायुयान की उर्ध्वाधर ऊँचाई **$1000\sqrt{3}$ मीटर** होगी। उत्तर

11. एक मकान की ऊँचाई $30\sqrt{3}$ मीटर है। एक मीनार के शिखर से मकान के आधार तथा चोटी के अवनमन कोण क्रमशः $60°$ तथा $45°$ हैं। मीनार की ऊँचाई तथा मकान से मीनार की क्षैतिज दूरी ज्ञात कीजिए।

हल– माना चित्र में, $AB = h$ मीटर ऊँची मीनार है। मीनार से x दूरी पर $30\sqrt{3}$ मीटर ऊँचाई का मकान PQ स्थित है। मीनार AB के शिखर A से मकान के आधार व चोटी के अवनमन कोण क्रमशः $60°$ व $45°$ हैं।



PL, भुजा AB पर लम्ब डाला।

अतः $LB = PQ = 30\sqrt{3}$ मीटर

$PL = QB = x$ मीटर

$\angle AQB = \angle MAQ = 60°$

तथा $\angle APL = \angle MAP = 45°$

$\therefore$ समकोण ΔALP में,

$\tan 45° = \frac{AL}{PL}$

$1 = \frac{AL}{x}$

या $AL = x$ ....(1)

तथा समकोण ΔABQ में,

$\tan 60° = \frac{AB}{QB}$ $[\because AB = AL + LB]$

या $\sqrt{3} = \frac{AL + LB}{QB}$

या $\sqrt{3} = \frac{AL + PQ}{QB}$

या $\sqrt{3}=\frac{x+30\sqrt{3}}{x}$ [समीकरण (1) से]

या $\sqrt{3}x=x+30\sqrt{3}$

या $\sqrt{3}x-x=30\sqrt{3}$

या $(\sqrt{3}-1)x=30\sqrt{3}$

या $x=\frac{30\sqrt{3}}{(\sqrt{3}-1)}=\frac{30\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$

या $x=\frac{30(3+\sqrt{3})}{3-1}=\frac{30(3+\sqrt{3})}{2}=15(3+\sqrt{3})$ मीटर

मीनार की ऊँचाई $(h)=AB=AL+LB=x+PQ=15(3+\sqrt{3})+30\sqrt{3}$

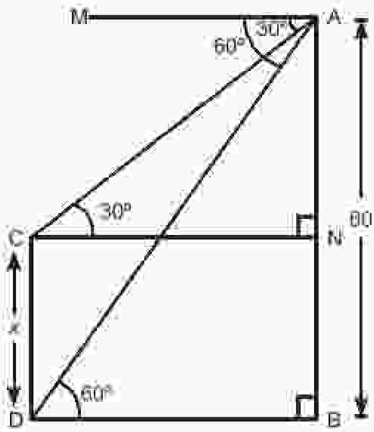
$=45+15\sqrt{3}+30\sqrt{3}=45+45\sqrt{3}=45(1+\sqrt{3})$ मीटर

अतः मीनार की ऊँचाई $=\mathbf{45(1+\sqrt{3})}$ **मीटर**

तथा मीनार से मकान की क्षैतिज दूरी $=\mathbf{15(3+\sqrt{3})}$ **मीटर** उत्तर

12. एक भवन तथा एक मीनार एक ही तल पर स्थित हैं। मीनार की चोटी से भवन के शीर्ष तथा आधार के अवनमन कोण क्रमशः 30° व 60° हैं, यदि मीनार की ऊँचाई 60 मीटर है तो भवन की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल– माना चित्र में, $AB=60$ मीटर ऊँची एक मीनार तथा उसी तल में भवन $CD=x$ मीटर ऊँचा स्थित है। मीनार की चोटी A से भवन के शीर्ष C तथा आधार D के अवनमन कोण क्रमशः 30° व 60° हैं। CN, भुजा AB पर लम्ब डाला।



अतः $NB=CD=x$

तथा $CN=DB$

∴ समकोण ΔANC में,

$\tan 30°=\frac{AN}{CN}$

या $\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{AN}{CN}$

या $CN=\sqrt{3}AN$ ....(1)

समकोण ΔABD में,

$\tan 60°=\frac{AB}{DB}$

या $\sqrt{3}=\frac{60}{CN}$

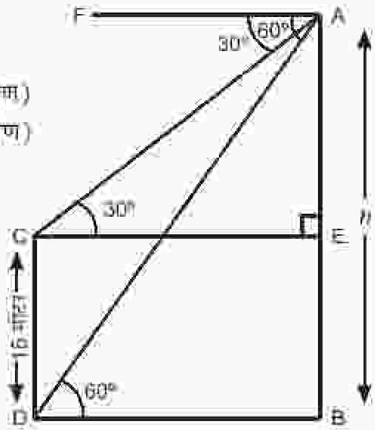
या $\sqrt{3}=\frac{60}{\sqrt{3}AN}$ [समीकरण (1) से]

या $AN=\frac{60}{3}=20$ मीटर

भवन की ऊँचाई $CD=NB=AB-AN=60-20=$ **40 मीटर** उत्तर

13. एक मीनार के शिखर से एक भवन के शिखर तथा आधार के अवनमन कोण क्रमशः 30° व 60° हैं। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए, जबकि भवन की ऊँचाई 15 मीटर है।

हल– माना चित्र में, $AB = h$ मीटर ऊँची कोई मीनार है। $CD = 15$ मीटर ऊँचा एक भवन है, जिसके शिखर व आधार के मीनार के शिखर से अवनमन कोण क्रमशः $\angle FAC = 30°$ तथा $\angle FAD = 60°$ है। CE, भुजा AB पर लम्ब डाला।



अतः $CE = DB$

तथा $EB = CD = 15$ मीटर

$\angle ACE = \angle FAC = 30°$ (एकान्तर कोण)

तथा $\angle ADB = \angle FAD = 60°$ (एकान्तर कोण)

$\therefore$ समकोण ΔACE में,

$$\tan 30° = \frac{AE}{CE}$$

या $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{AE}{DB}$

या $DB = \sqrt{3}AE = \sqrt{3}(AB - EB)$

$= \sqrt{3}(h - 15)$ मीटर

तथा समकोण ΔABD में,

$$\tan 60° = \frac{AB}{DB}$$

$\sqrt{3} = \frac{h}{DB}$

या $\sqrt{3} = \frac{h}{\sqrt{3}(h - 15)}$

या $3(h - 15) = h$

या $3h - 45 = h$

या $3h - h = 45$

या $2h = 45$

या $h = \frac{45}{2} = 22.5$ मीटर

अतः मीनार की ऊँचाई **$AB = h = 22.5$ मीटर** है। **उत्तर**

14. 10 मीटर ऊँचे एक स्तम्भ के पाद से एक पहाड़ी की चोटी का उन्नयन कोण 60° तथा स्तम्भ के शीर्ष से पहाड़ी की चोटी का उन्नयन कोण 30° है। पहाड़ी की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल– माना चित्र में $MN = h$ मीटर ऊँची पहाड़ी है तथा $AB = 10$ मीटर ऊँचाई का कोई स्तम्भ है। स्तम्भ के पाद तथा शीर्ष से पहाड़ी की चोटी के उन्नयन कोण क्रमशः 60° तथा 30° हैं। AD, भुजा MN पर लम्ब डाला।

अतः $AD = BN$

तथा $DN = AB = 10$ मीटर

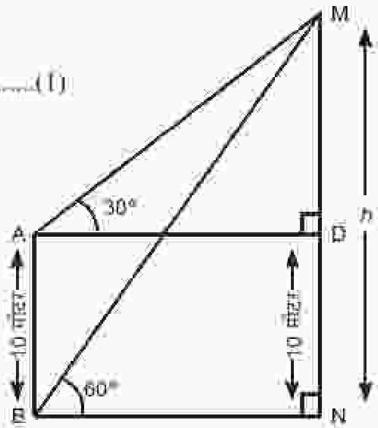
$\therefore$ समकोण ΔMDA में,

$$\tan 30° = \frac{MD}{AD}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{MN - DN}{BN} \qquad [\because MD = MN - DN]$$

या $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h-10}{BN}$

या $BN = \sqrt{3}h - 10\sqrt{3}$ ....(1)



तथा समकोण ΔMNB में,

$\tan 60° = \frac{MN}{BN}$

$\sqrt{3} = \frac{h}{BN}$

या $BN = \frac{h}{\sqrt{3}}$ ....(2)

समीकरण (1) व (2) से

$\frac{h}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}h - 10\sqrt{3}$

या $h = 3h - 30$

या $30 = 3h - h$

या $30 = 2h \Rightarrow h = \frac{30}{2} = 15$ मीटर

अतः पहाड़ी की ऊँचाई (h) = **15 मीटर** है। उत्तर

15. 5 मीटर ऊँचे बिजली के एक खम्भे के पाद से किसी मीनार की चोटी का उन्नयन कोण 60° तथा खम्भे के शीर्ष से मीनार की चोटी का उन्नयन कोण 30° है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल– माना $PQ = h$ मीटर ऊँची कोई मीनार है तथा $RS = 5$ मीटर ऊँचा एक बिजली का खम्भा इस प्रकार है कि मीनार की चोटी का खम्भे के पाद व शीर्ष से उन्नयन कोण क्रमशः 60° व 30° है। RM, भुजा PQ पर लम्ब डाला है।

अतः $RM = SQ = x$

तथा $MQ = RS = 5$ मीटर

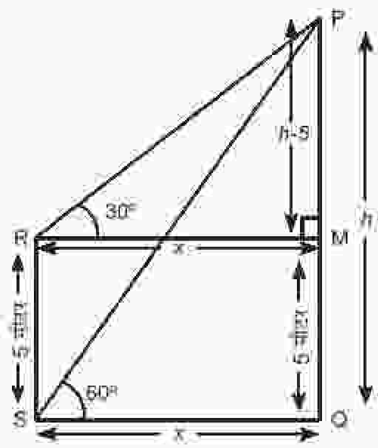
$PM = PQ - MQ = (h-5)$ मीटर

$\therefore$ समकोण ΔPMR में,

$\tan 30° = \frac{PM}{RM}$

या $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h-5}{x}$

या $x = \sqrt{3}(h-5)$ ....(1)



तथा समकोण ΔPQS में,

$\tan 60° = \frac{PQ}{SQ}$

या $\sqrt{3} = \frac{h}{x}$

या $x = \frac{h}{\sqrt{3}}$ ....(2)

समीकरण (1) व (2) से,

$\sqrt{3}(h-5) = \frac{h}{\sqrt{3}}$

या $3(h-5) = h$

या $3h - 15 = h$

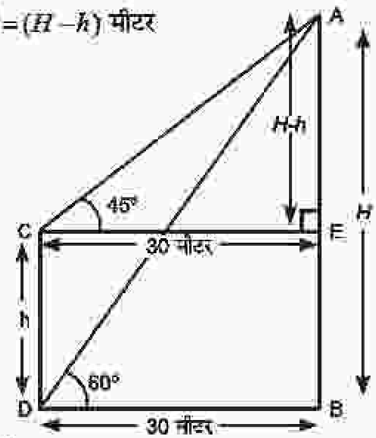
या $3h - h = 15$

या $2h = 15 \Rightarrow h = \frac{15}{2} = 7{\cdot}5$ मीटर

अत: मीनार की ऊँचाई 7.5 मीटर है। उत्तर

16. एक मकान के आधार से 30 मीटर दूर स्थित एक मीनार के शिखर का उन्नयन कोण 60° तथा मकान की छत से मीनार के शिखर का उन्नयन कोण 45° है। मकान तथा मीनार की ऊँचाईयाँ ज्ञात कीजिए।

हल– माना चित्र में, $AB = H$ मीटर ऊँची मीनार तथा $CD = h$ मीटर ऊँचा मकान है। मीनार व मकान के बीच दूरी $DB = 30$ मीटर है। CE भुजा AB पर लम्ब है। अत: $CE = DB = 30$ मीटर, $EB = CD = h$ मीटर $AE = AB - EB = (H - h)$ मीटर



$\therefore$ समकोण ΔAEC में,

$\tan 45° = \frac{AE}{CE}$

$1 = \frac{H-h}{30}$

या $H - h = 30$ मीटर ....(1)

तथा समकोण ΔABD में,

$\tan 60° = \frac{AB}{DB}$

या $\sqrt{3} = \frac{H}{30}$

या $H = 30\sqrt{3}$ मीटर $= 30 \times 1{\cdot}732 = 51{\cdot}96$ मीटर

H का मान समीकरण में (1) रखने पर,

$51{\cdot}96 - h = 30$

या $51{\cdot}96 - 30 = h$

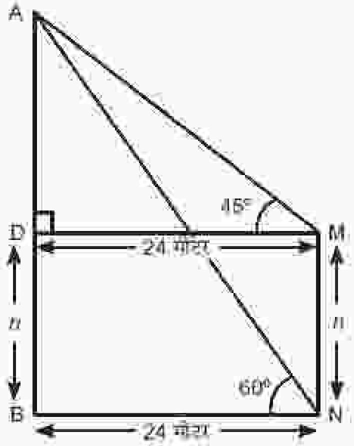
या $21{\cdot}96 = h \Rightarrow h = 21{\cdot}96$ मीटर

अत: मकान की ऊँचाई = **21·96** मीटर

तथा मीनार की ऊँचाई = **51·96** मीटर उत्तर

17. एक मकान के आधार से 24 मीटर दूर स्थित एक चिमनी के शिखर का उन्नयन कोण 60° तथा मकान की छत से चिमनी के शिखर का उन्नयन कोण 45° है। मकान की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल– माना चित्र में, AB कोई चिमनी तथा इससे 24 मीटर दूरी पर मकान MN स्थित है, जिसकी ऊँचाई $MN = h$ मीटर। चिमनी के शिखर A के मकान MN के पाद N तथा छत M से उन्नयन क्रमश: $\angle ANB = 60^\circ$ तथा $\angle AMD = 45^\circ$ तथा भुजा MD, AB पर लम्ब डाला गया।



अत: $DM = BN = 24$ मीटर

$DB = MN = h$ मीटर

$\therefore$ समकोण ΔADM में,

$$\tan 45^\circ = \frac{AD}{MD}$$

या $$1 = \frac{AD}{MD}$$

या $AD = MD = 24$ मीटर ......(1)

तथा समकोण ΔABN में,

$$\tan 60^\circ = \frac{AB}{BN}$$

या $$\sqrt{3} = \frac{AD + DB}{24} \quad [\because AB = AD + DB]$$

या $$\sqrt{3} = \frac{24 + h}{24}$$

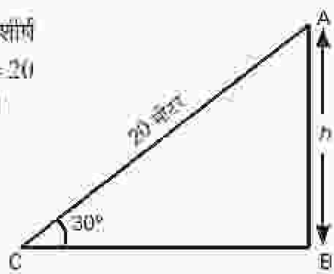
या $24\sqrt{3} = 24 + h$

या $h = 24\sqrt{3} - 24 = 24(\sqrt{3} - 1) = 24(1 \cdot 732 - 1) = 24 \times 0 \cdot 732 = 17 \cdot 568$ मीटर

$= 17 \cdot 57$ **मीटर** उत्तर

18. एक सर्कस का कलाकार 20 मीटर लम्बी रस्सी पर चढ़ रहा है, जो कि एक ऊर्ध्वाधर स्तम्भ के शीर्ष से बँधी हुई है। स्तम्भ की ऊँचाई ज्ञात कीजिए। यदि रस्सी द्वारा जमीन के साथ बना हुआ उन्नयन कोण 30° है।

हल– माना $AB = h$ मीटर ऊँचाई का एक स्तम्भ है, जिसके शीर्ष A तथा जमीन पर स्थित बिन्दु C से एक रस्सी $AC = 20$ मीटर जमीन के साथ 30° का कोण बनाते हुए बँधी है।



अत: समकोण ΔABC में,

$$\sin 30^\circ = \frac{AB}{AC}$$

या $$\frac{1}{2} = \frac{h}{20}$$

या $$h = \frac{20}{2} = 10 \text{ मीटर}$$ उत्तर

19. एक वृक्ष तूफान के कारण टूट जाता है और टूटा हुआ भाग जमीन के साथ 30° का कोण बनाता है। वृक्ष के पाद से तथा उस बिन्दु के बीच की दूरी (जहाँ वृक्ष का शीर्ष जमीन को छूता है) 8 मीटर है। वृक्ष की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल– माना वृक्ष APQ का ऊपरी भाग AP तूफान में टूटकर जमीन पर PO स्थिति ग्रहण कर लेता है। अर्थात वृक्ष का ऊपरी बिन्दु A जमीन को बिन्दु O पर छूता है। जो पृथ्वी के साथ 30° का कोण बनाता है।

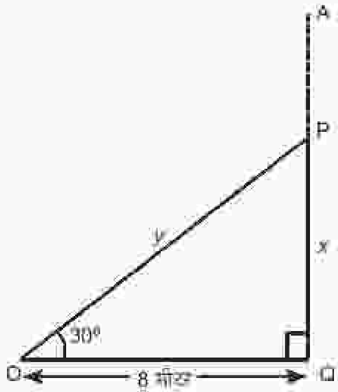
तब $OP = AP$

प्रश्नानुसार,

$OQ = 8$ मीटर तथा $\angle POQ = 30^\circ$

माना $OP = y$ तथा $PQ = x$

समकोण ΔPQO में,



$$\tan 30^\circ = \frac{PQ}{OQ}$$

या $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{x}{8}$

या $x = \frac{8}{\sqrt{3}}$ मीटर

पुनः समकोण ΔPQO में,

$$\cos 30^\circ = \frac{OQ}{OP}$$

या $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{8}{y}$

या $y = \frac{16}{\sqrt{3}}$ मीटर

अतः वृक्ष की ऊँचाई $= AQ = AP + PQ = OP + PQ = y + x$

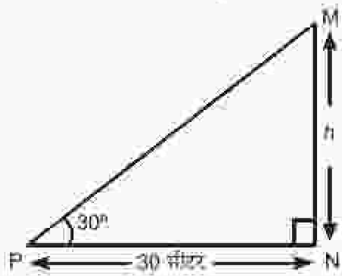
$= \frac{16}{\sqrt{3}} + \frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{16+8}{\sqrt{3}} = \frac{24}{\sqrt{3}} = \frac{24\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = \frac{24\sqrt{3}}{3} = \mathbf{8\sqrt{3}}$ **मीटर** उत्तर

20. जमीन पर स्थित किसी बिन्दु से एक टावर के शीर्ष का उन्नयन कोण 30° है। यदि टावर के आधार से वह बिन्दु 30 मीटर दूर है, तो टावर की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल– माना चित्र में, MN एक टावर है, जिसकी ऊँचाई $MN = h$ मीटर। टावर से 30 मीटर दूर स्थित बिन्दु P है जिससे टावर के शीर्ष M का उन्नयन कोण 30° है अर्थात्

$\angle MPN = 30^\circ$

समकोण ΔMNP में,



$$\tan 30^\circ = \frac{MN}{PN}$$

या $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{30}$

या $h = \frac{30}{\sqrt{3}} = \frac{10\times 3}{\sqrt{3}}$

$= 10\sqrt{3}$ मीटर उत्तर

21. एक पतंग जमीन से 60 मीटर की ऊँचाई पर उड़ रही है। पतंग से बँधा हुआ धागा जमीन पर स्थित किसी बिन्दु पर बँधा हुआ है। यदि धागे का जमीन से झुकाव 60° है, तो धागे की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल– माना चित्र में एक पतंग आकाश में K बिन्दु पर उड़ रही है। PK पतंग में बँधा धागा है जो जमीन पर बिन्दु P पर बँधा है तथा जमीन के साथ 60° का कोण बनाता है। पतंग की जमीन से ऊँचाई $KG = 60$ मीटर।

माना धागे की लम्बाई $= PK = x$ मीटर है।

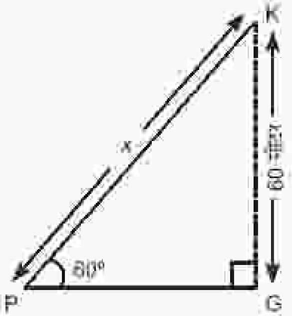
अतः समकोण ΔKGP में,

$$\sin 60^\circ = \frac{KG}{PK}$$

या $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{60}{x}$

या $x = \frac{60 \times 2}{\sqrt{3}}$

$$= \frac{3 \times 20 \times 2}{\sqrt{3}} = 40\sqrt{3} \text{ मीटर}$$



उत्तर

22. एक 1·5 मीटर लम्बा लड़का 30 मीटर ऊँची इमारत से कुछ दूरी पर खड़ा हुआ है। लड़के द्वारा इमारत की ओर चलने पर लड़के की आँख से इमारत के शीर्ष का उन्नयन कोण 30° से बढ़कर 60° हो जाता है। वह दूरी ज्ञात कीजिए, जितनी लड़का इमारत की ओर चला।

हल– माना $LD = 1·5$ मीटर लम्बा एक लड़का $AB = 30$ मीटर ऊँची इमारत से $BD = y$ दूरी पर खड़ा है, जहाँ पर लड़के की आँख से इमारत के शीर्ष A का उन्नयन कोण $(\angle ALM) = 30^\circ$ है। इमारत की ओर x दूरी चलने पर यह कोण $(\angle AL'M) = 60^\circ$ हो जाता है। LM, भुजा AB पर लम्ब है।

चित्रानुसार,

$LD = MB = 1·5$ मीटर

$LL' = DD' = x$ तथा $LM = DB = y$, $L'M = LM - LL'$

$= (y - x)$ मीटर

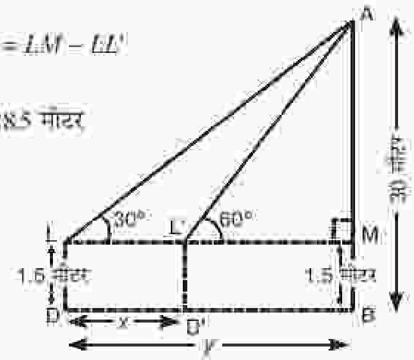
तथा $AM = (AB - MB) = (30 - 1.5) = 28.5$ मीटर

$\therefore$ समकोण ΔAML में,

$$\tan 30^\circ = \frac{AM}{LM}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{28·5}{y}$$

या $y = 28·5\sqrt{3}$ मीटर ....(1)



तथा समकोण $\Delta AML'$ में,

$$\tan 60^\circ = \frac{AM}{L'M}$$

$$\sqrt{3} = \frac{28·5}{LM - LL'}$$

या $\sqrt{3} = \frac{28·5}{y - x}$

या $\sqrt{3} = \dfrac{28 \cdot 5}{28 \cdot 5\sqrt{3} - x}$ [समीकरण (1) से]

या $28 \cdot 5 \times 3 - \sqrt{3}x = 28 \cdot 5$

या $85 \cdot 5 - 28 \cdot 5 = \sqrt{3}x$

या $57 \cdot 0 = \sqrt{3}x$

या $x = \dfrac{57}{\sqrt{3}} = \dfrac{57 \times \sqrt{3}}{3} = 19\sqrt{3}$ मीटर

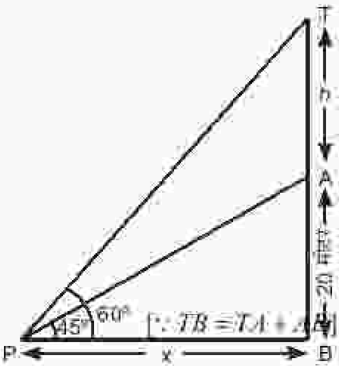
अत: लड़का इमारत की ओर **$19\sqrt{3}$ मीटर** दूरी चलता है। उत्तर

23. एक 20 मीटर ऊँची इमारत पर एक टावर बनाया गया है। जमीन पर स्थित किसी बिन्दु से टावर के शीर्ष और आधार के उन्नयन कोण 60° व 45° हैं। टावर की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल– माना चित्र में, $AB = 20$ मीटर ऊँची एक इमारत है। जिसके ऊपर $TA = h$ मीटर ऊँचाई का एक टावर बनाया गया है। जमीन पर कोई बिन्दु P है। जिसकी इमारत के आधार से दूरी $PB = x$ मीटर है।

$\angle APB = 45°$ तथा $\angle TPB = 60°$

समकोण ΔABP में,



$\tan 45° = \dfrac{AB}{PB}$

या $1 = \dfrac{20}{x}$

या $x = 20$ मीटर

समकोण ΔTBP में,

$\tan 60° = \dfrac{TB}{PB}$

या $\sqrt{3} = \dfrac{TA + AB}{PB}$

या $\sqrt{3} = \dfrac{h + 20}{20}$

या $20\sqrt{3} = h + 20$

या $h = 20\sqrt{3} - 20 \Rightarrow h = 20(\sqrt{3} - 1)$ **मीटर** उत्तर

24. एक पीठ पर 1·6 मीटर लम्बी मूर्ति स्थित है। जमीन पर स्थित किसी बिन्दु से मूर्ति के शीर्ष का उन्नयन कोण 60° है और उसी बिन्दु से पीठ के शीर्ष का उन्नयन कोण 45° है। पीठ की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल– माना चित्र में, $AB = h$ मीटर ऊँचा एक पीठ है, जिस पर $MA = 1 \cdot 6$ मीटर ऊँची एक मूर्ति स्थित है। जमीन पर एक बिन्दु P है, जिस पर मूर्ति के शीर्ष एवं पीठ के शीर्ष के उन्नयन कोण क्रमश: $\angle MPB = 60°$ तथा $\angle APB = 45°$ हैं।

$\therefore$ समकोण ΔABP में,

$\tan 45° = \dfrac{AB}{PB}$

या $1 = \dfrac{h}{PB}$

या $PB = h$ ....(1)

तथा समकोण ΔMPB में,

$\tan 60° = \frac{MB}{PB}$

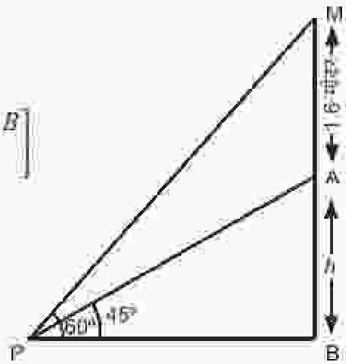
या $\sqrt{3} = \frac{MA + AB}{h}$ $\left[\because MB = MA + AB = 1{\cdot}6 + h\right]$

या $\sqrt{3} = \frac{1{\cdot}6 + h}{h}$

या $\sqrt{3}h = 1{\cdot}6 + h$

या $\sqrt{3}h - h = 1{\cdot}6$

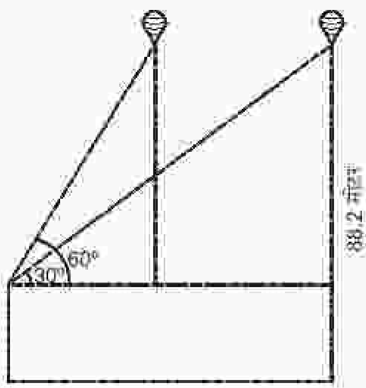
या $(\sqrt{3} - 1)h = 1{\cdot}6$



या $h = \frac{1{\cdot}6}{\sqrt{3} - 1} = \frac{1{\cdot}6 \times (\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} = \frac{1{\cdot}6(\sqrt{3} + 1)}{3 - 1} = \frac{1{\cdot}6(\sqrt{3} + 1)}{2}$

$= 0{\cdot}8(\sqrt{3} + 1)$ **मीटर** उत्तर

25. हवा के साथ क्षैतिज रेखा पर गति करते हुए एक गुब्बारा 1·2 मीटर लम्बी लड़की से 88·2 मीटर की ऊँचाई पर उड़ रहा है। गुब्बारा किसी क्षण लड़की की आँख से 60° का उन्नयन कोण बनाता है। कुछ समय बाद उन्नयन कोण 30° कम हो जाता है। उस अन्तराल के दौरान गुब्बारें द्वारा चली गई दूरी ज्ञात कीजिए।



हल– चित्र में, $GL = 1{\cdot}2$ मीटर लम्बी एक लड़की है। B_1 व B_2 गुब्बारें की दो स्थितियाँ हैं, जिनके लड़की की आँख से उन्नयन कोण क्रमशः 60° व 30° हैं। माना गुब्बारें द्वारा B_1 से B_2 तक चलित दूरी $B_1B_2 = x$ मीटर।

गुब्बारें की ऊँचाई = 88·2 मीटर

चित्रानुसार, $GL = QM = 1{\cdot}2$ मीटर

अतः $B_1P = B_2Q = 88{\cdot}2 - 1{\cdot}2 = 87$ मीटर

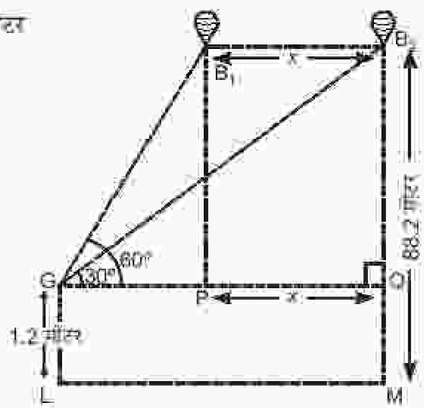
$B_1B_2 = PQ = x$

$\therefore$ समकोण ΔB_1PG में,

$\tan 60° = \frac{B_1P}{GP}$

$\sqrt{3} = \frac{87}{GP}$

या $GP = \frac{87}{\sqrt{3}}$ ....(1)



तथा समकोण ΔB_2QG में,

$\tan 30° = \frac{B_2Q}{GQ}$

या $\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{87}{GP+PQ}$

या $\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{87}{GP+x}$

या $GP+x=87\times\sqrt{3}$

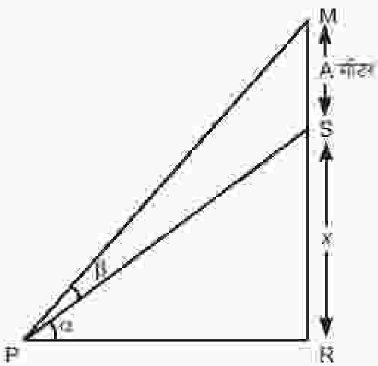
या $\frac{87}{\sqrt{3}}+x=87\sqrt{3}$ [समीकरण (1) से]

या $x=87\sqrt{3}-\frac{87}{\sqrt{3}}$

या $x=\frac{87\times3-87}{\sqrt{3}}=\frac{261-87}{\sqrt{3}}=\frac{174}{\sqrt{3}}=\frac{174\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{174\sqrt{3}}{3}=58\sqrt{3}$ **मीटर** **उत्तर**

26. एक उर्ध्वाधर खम्भा अपने पाद के तल में स्थित किसी बिन्दु पर α कोण अन्तरित करता है तथा एक A मीटर लम्बा आदमी जो खम्भे के शिखर पर खड़ा है, सड़क के उस बिन्दु पर β कोण अन्तरित करता है। सिद्ध कीजिए खम्भे की ऊँचाई $A \sin\alpha \cos(\alpha+\beta) \operatorname{cosec}\beta$ मीटर है।

हल– माना चित्र में $SR=x$ मीटर लम्बा खम्भा है, जो अपने पाद के तल में स्थित बिन्दु P पर α कोण अन्तरित करता है। $MS=A$ मीटर लम्बा आदमी खम्भे के शिखर पर खड़ा है, जो बिन्दु P पर β कोण अन्तरित करता है।



$\therefore$ समकोण ΔSRP में,

$\cot\alpha=\frac{PR}{SR}$

या $\cot\alpha=\frac{PR}{x}$

या $PR=x\cot\alpha$ ....(1)

तथा समकोण ΔMRP में,

$\cot(\alpha+\beta)=\frac{PR}{MR}$

या $\cot(\alpha+\beta)=\frac{PR}{MS+SR}$

या $\cot(\alpha+\beta)=\frac{PR}{(A+x)}$

या $PR=(A+x)\cot(\alpha+\beta)$ ....(2)

समीकरण (1) व (2) से,

$x\cot\alpha=(A+x)\cot(\alpha+\beta)$

या $x\cot\alpha=A\cot(\alpha+\beta)+x\cot(\alpha+\beta)$

या $x\cot\alpha-x\cot(\alpha+\beta)=A\cot(\alpha+\beta)$

या $x\{\cot\alpha-\cot(\alpha+\beta)\}=A\cot(\alpha+\beta)$

या $x\left\{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}\right\}=A\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$

या $x\left\{\dfrac{\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha-\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha}{\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}\right\}=A\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$

या $x\dfrac{\sin(\alpha+\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}=A\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$

या $x\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}=A\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$

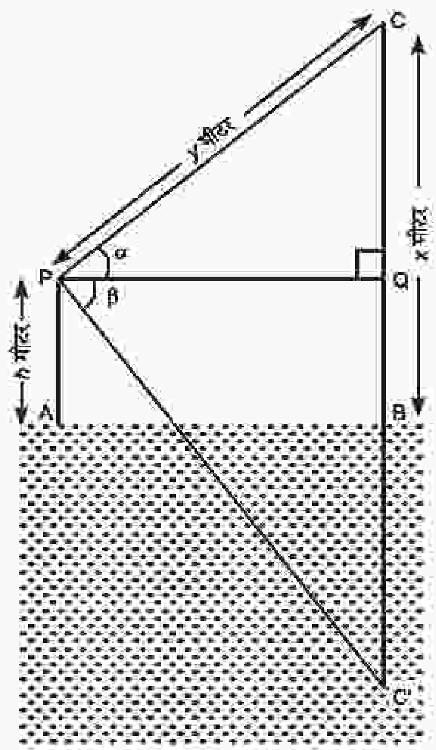
या $x\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}=A\cos(\alpha+\beta)$

या $x=\dfrac{A\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)}{\sin\beta}$

या $x=A\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)\operatorname{cosec}\beta$ इति सिद्धम्

27. एक झील के तल से h मीटर ऊँचाई पर स्थित एक स्थान पर बादल का उन्नयन कोण α है तथा झील में उसके प्रतिबिम्ब का अवनमन कोण β है। सिद्ध कीजिए उस स्थान से बादल की दूरी $\dfrac{2h\sec\alpha}{\tan\beta-\tan\alpha}$ मीटर है।

हल– माना चित्र में किसी झील के तल पर दो बिन्दु A व B हैं। बिन्दु B से x मीटर ऊँचाई पर बादल C है। बिन्दु A से h ऊँचाई पर कोई बिन्दु P है, जिससे बादल C का उन्नयन कोण $\angle CPQ = \alpha$ है बिन्दु P से बादल की दूरी $= PC = y$, बिन्दु B से x गहराई पर बादल C का प्रतिबिम्ब C' है, जिससे बिन्दु P का अवनमन β है।



चित्रानुसार, $QB = PA = h$ मीटर

तथा $BC' = BC = x$ मीटर

$CQ = BC - BQ$ तथा $QC' = BQ + BC'$

$= x - h \qquad\qquad = h + x$

$\therefore$ समकोण ΔCQP में,

$\tan\alpha = \dfrac{CQ}{PQ}$

या $\tan\alpha = \dfrac{BC-QB}{PQ}$

या $\tan\alpha = \dfrac{x-h}{PQ}$

या $PQ\tan\alpha = x-h$

या $x = h + PQ\tan\alpha$ ....(1)

तथा समकोण $\Delta PQC'$ में,

$\tan\beta = \dfrac{QC'}{PQ}$

या $\tan\beta = \dfrac{QB+BC'}{PQ}$

या $\tan\beta = \dfrac{h+x}{PQ}$

या $PQ \tan\beta = h + x$

या $x = PQ\tan\beta - h$ ....(2)

समीकरण (1) व (2) से,

$h + PQ\tan\alpha = PQ\tan\beta - h$

या $h + h = PQ\tan\beta - PQ\tan\alpha$

या $2h = PQ(\tan\beta - \tan\alpha)$

या $PQ = \dfrac{2h}{(\tan\beta - \tan\alpha)}$ ....(3)

पुनः समकोण ΔCQP में,

$\cos\alpha = \dfrac{PQ}{PC}$

या $\cos\alpha = \dfrac{PQ}{y}$

या $y = \dfrac{PQ}{\cos\alpha} = PQ\sec\alpha = \dfrac{2h\sec\alpha}{\tan\beta - \tan\alpha}$ [समीकरण (3) से]

$= \dfrac{2h\sec\alpha}{\tan\beta - \tan\alpha}$ इति सिद्धम्

28. एक मीनार एक क्षैतिज समतल पर खड़ी है तथा क्षैतिज से α कोण पर झुके पहाड़ से इसकी दूरी a है। एक आदमी जो पहाड़ पर बैठा है, मीनार के ठीक ऊपर से तालाब को देख सकता है जो मीनार से b दूरी पर है यदि आदमी की पहाड़ के आधार से दूरी c हो तो सिद्ध कीजिए कि मीनार की ऊँचाई $\dfrac{bc\sin\alpha}{a + b + c\cos\alpha}$ है।

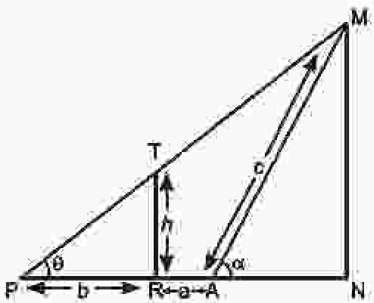
हल– माना चित्र में AMN एक पहाड़ है जो क्षैतिज से α कोण पर झुका हुआ है। पहाड़ के आधार A से a मीटर दूरी पर $TR = h$ ऊँचाई की एक मीनार है। पहाड़ के शिखर M पर बैठा आदमी मीनार TR से b दूरी पर स्थित तालाब को मीनार के ठीक ऊपर से देख सकता है। माना $\angle MPN = \angle TPR = \theta$, पहाड़ के आधार A से आदमी M की दूरी $= c$ मीटर

$\therefore$ समकोण ΔMNA में,

$\sin\alpha = \dfrac{MN}{MA}$

या $\sin\alpha = \dfrac{MN}{c}$

या $MN = c\sin\alpha$ ....(1)



पुनः समकोण ΔMNA में,

$\cos\alpha = \dfrac{AN}{MA}$

या $\cos\alpha = \dfrac{AN}{c}$

या $AN = c\cos\alpha$ ....(2)

समकोण ΔTRP में,

$\tan\theta = \frac{TR}{PR} \Rightarrow \tan\theta = \frac{h}{b}$ ....(3)

समकोण ΔMNP में,

$\tan\theta = \frac{MN}{PN}$

या $\tan\theta = \frac{MN}{PR+RA+AN}$ $[PN = PR + RA + AN]$

या $\tan\theta = \frac{c\sin\alpha}{b+a+c\cos\alpha}$ ....(4)

समीकरण (3) व (4) से,

$\frac{h}{b} = \frac{c\sin\alpha}{b+a+c\cos\alpha}$

या $h = \frac{bc\sin\alpha}{a+b+c\cos\alpha}$ इति सिद्धम्

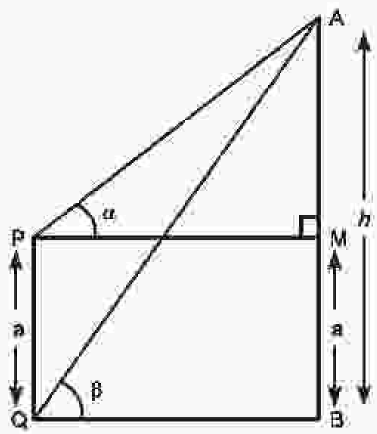
29. **दीवार पर खड़ा एक व्यक्ति देखता है कि एक बिजली के खम्भे के शिखर का उन्नयन कोण α है। दीवार के नीचे से उसी खम्भे के शिखर का उन्नयन कोण β है। यदि दीवार की ऊँचाई a है, तो सिद्ध कीजिए कि खम्भे की ऊँचाई $\frac{a\sin\beta\cos\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}$ होगी।**

हल– माना चित्र में $AB = h$ ऊँचाई का एक खम्भा है। $PQ = a$ ऊँचाई की दीवार है। बिन्दु P पर खम्भे के शिखर का उन्नयन कोण $\angle APM = \alpha$ तथा दीवार के नीचे का उन्नयन कोण $\angle AQB = \beta$ है। PM, भुजा AB पर लम्ब है।

अतः $MB = PQ = a$ तथा $PM = QB$

$AM = AB - MB = h - a$

$\therefore$ समकोण ΔAMP में,



$\tan\alpha = \frac{AM}{PM}$

या $\tan\alpha = \frac{h-a}{PM}$

या $PM = \frac{h-a}{\tan\alpha}$ ....(1)

तथा समकोण ΔABQ में,

$\tan\beta = \frac{AB}{QB}$

या $\tan\beta = \frac{h}{PM}$

या $PM = \frac{h}{\tan\beta}$ ....(2)

समीकरण (1) व (2) से,

$\frac{h-a}{\tan\alpha} = \frac{h}{\tan\beta}$

या $\dfrac{h}{\tan\alpha}-\dfrac{a}{\tan\alpha}=\dfrac{h}{\tan\beta}$

या $\dfrac{h}{\tan\alpha}-\dfrac{h}{\tan\beta}=\dfrac{a}{\tan\alpha}$

या $h\left(\dfrac{1}{\tan\alpha}-\dfrac{1}{\tan\beta}\right)=\dfrac{a}{\tan\alpha}$

या $h\left(\dfrac{1}{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}-\dfrac{1}{\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}\right)=\dfrac{a}{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$

या $h\left(\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\dfrac{\cos\beta}{\sin\beta}\right)=\dfrac{a\cos\alpha}{\sin\alpha}$

या $h\left(\dfrac{\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha}{\sin\alpha\sin\beta}\right)=\dfrac{a\cos\alpha}{\sin\alpha}$

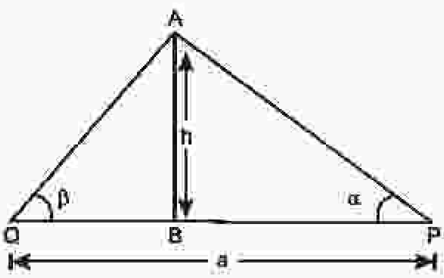
या $h\dfrac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}=\dfrac{a\cos\alpha}{\sin\alpha}$

या $h=\dfrac{a\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha}{\sin\alpha\sin(\beta-\alpha)}$

या $h=\dfrac{a\sin\beta\cos\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}$ इति सिद्धम्

30. दो बिन्दु जिनके बीच की दूरी a है एक मीनार के ठीक पूर्व की ओर तथा दूसरा पश्चिम की ओर है। यदि इन बिन्दुओं से मीनार के उन्नयन कोण α और β हैं, तो सिद्ध कीजिए कि मीनार की ऊँचाई $\dfrac{a}{\cot\alpha+\cot\beta}=\dfrac{a\tan\alpha\tan\beta}{\tan\beta+\tan\alpha}=\dfrac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$ होगी।

हल– माना AB एक मीनार है, जिसकी ऊँचाई h है। मीनार के पूर्व में बिन्दु P तथा पश्चिम में बिन्दु Q हैं, जहाँ $PQ=a$ बिन्दु P व Q पर मीनार के शिखर के उन्नयन कोण क्रमश: $\angle APB=\alpha$ तथा $\angle AQB=\beta$ हैं।



$\therefore$ समकोण ΔABP में,

$\tan\alpha=\dfrac{AB}{PB}$

या $\tan\alpha=\dfrac{h}{PB}$

या $PB=\dfrac{h}{\tan\alpha}$ ....(1)

तथा समकोण ΔABQ में,

$\tan\beta=\dfrac{AB}{QB}$

या $\tan\beta=\dfrac{h}{QB}$

या $QB = \dfrac{h}{\tan\beta}$ ....(2)

समीकरण (1) व (2) को जोड़ने पर

$$PB + QB = \frac{h}{\tan\alpha} + \frac{h}{\tan\beta}$$

या $PQ = h\left(\dfrac{1}{\tan\alpha} + \dfrac{1}{\tan\beta}\right)$ $[\because PB + QB = PQ]$

$$a = h\left(\frac{1}{\tan\alpha} + \frac{1}{\tan\beta}\right)$$

$$h = \frac{a\tan\alpha\tan\beta}{\tan\beta + \tan\alpha}$$

पुनः $a = h\left(\dfrac{1}{\tan\alpha} + \dfrac{1}{\tan\beta}\right)$

या $a = h(\cot\alpha + \cot\beta)$

या $h = \dfrac{a}{\cot\alpha + \cot\beta}$

या $h = \dfrac{a}{\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \dfrac{\cos\beta}{\sin\beta}}$

या $h = \dfrac{a}{\dfrac{\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}}$

या $h = \dfrac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}$

या $h = \dfrac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$

अतः मीनार की ऊँचाई $= \dfrac{a}{\cot\alpha + \cot\beta} = \dfrac{a\tan\alpha\tan\beta}{\tan\beta + \tan\alpha} = \dfrac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$ इति सिद्धम्

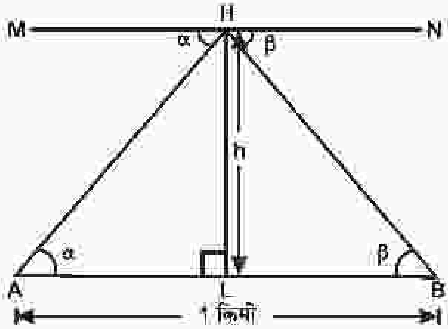
31. किसी क्षण एक सीधी सड़क के ऊपर कुछ ऊँचाई पर उड़ रहे एक हेलीकॉप्टर से सड़क के किनारे लगे दो क्रमागत किलोमीटर के पत्थरों के अवनमन कोण α और β हैं सिद्ध कीजिए हेलीकॉप्टर की ऊँचाई $\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$ किमी है।

हल– माना चित्र में A व B एक सीधी सड़क पर दो क्रमागत किलोमीटर के पत्थर हैं। सड़क के ऊपर h किमी ऊँचाई पर किसी क्षण हेलीकॉप्टर H बिन्दु पर स्थित है। बिन्दु H से पत्थर A व B के अवनमन कोण क्रमशः $\angle MHA = \alpha$ तथा $\angle NHB = \beta$ हैं, $HL = h$ किमी

चित्रानुसार,

$\angle HAL = \angle MHA = \alpha$

तथा $\angle HBL = \angle NHB = \beta$



∴ समकोण ΔHLA में,

$$\tan\alpha = \frac{HL}{AL}$$

या $\tan\alpha = \dfrac{h}{AL}$

या $AL = \dfrac{h}{\tan\alpha}$ ....(1)

तथा समकोण ΔHLB में,

$$\tan\beta = \frac{HL}{LB}$$

या $\tan\beta = \dfrac{h}{LB}$

या $LB = \dfrac{h}{\tan\beta}$ ....(2)

समीकरण (1) व (2) को जोड़ने पर

$$AL + LB = \frac{h}{\tan\alpha} + \frac{h}{\tan\beta} \qquad [\because AL + LB = AB]$$

या $AB = h\left(\dfrac{1}{\tan\alpha} + \dfrac{1}{\tan\beta}\right)$

या $1 = h(\cot\alpha + \cot\beta)$

या $1 = h\left(\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \dfrac{\cos\beta}{\sin\beta}\right)$

या $1 = h\left(\dfrac{\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\cos\beta}\right)$

या $1 = h\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cos\beta}$

या $h = \dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$ इति सिद्धम्

बहुविकल्पीय प्रश्न

नोट–बहुविकल्पीय प्रश्नों के उत्तर जानने के लिए पाठ्य पुस्तक के पृष्ठ संख्या 188 का अवलोकन कीजिए।

इकाई-5 ज्यामिति (Geometry)

11

वृत्त (Circle)

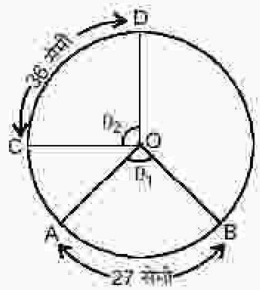
अभ्यास 11.1

1. एक वृत्त के दो चाप खंडों की लम्बाइयाँ क्रमश: 27 सेमी और 36 सेमी हैं। चाप खंडों द्वारा वृत्त के केन्द्र पर अंतरित कोणों के मापों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल– हम जानते हैं कि—

किसी वृत्त में चाप खंड द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण चाप खंड की लम्बाई के अनुक्रमानुपाती होता है।

चित्र में चाप AB व CD द्वारा अंतरित कोण क्रमश: θ_1 व θ_2 हैं।



$$\theta_1 \propto \widehat{AB} \quad \Rightarrow \quad \theta_1 = k\,\widehat{AB}$$

(k अनुक्रमानुपाती नियतांक है)

या $$\theta_1 = k \times 27 \qquad ...(1)$$

तथा $\theta_2 \propto \widehat{CD}$ या $\theta_2 = k\,\widehat{CD}$

या $$\theta_2 = k \times 36 \qquad ...(2)$$

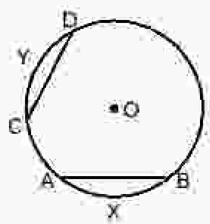
अत: $$\frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{k \times 27}{k \times 36} = \frac{3}{4}$$

$$\theta_1 : \theta_2 = 3 : 4$$ उत्तर

2. एक वृत्त का चाप AXB, चाप CYD के बराबर है, तो जीवा AB और CD की लम्बाइयों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल– हम जानते हैं कि—

किसी वृत्त में समान लम्बाई के चाप वृत्त पर समान जीवाएँ अंतरित करते हैं।



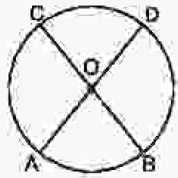
दिया है : $$\widehat{AXB} = \widehat{CYD}$$

अत: जीवा AB = जीवा CD

या $$\frac{\text{जीवा } AB}{\text{जीवा } CD}=\frac{1}{1}$$

अतः $AB : CD = 1 : 1$ **उत्तर**

3. संलग्न आकृति में, AD और BC वृत्त के दो व्यास हैं। चाप AC और चाप BD की लम्बाइयों में क्या अन्तर है?



हल– दिया है— AD व BC वृत्त के दो व्यास हैं।

अतः $AD = BC$ या $\widehat{ACD}=\widehat{BDC}$

दोनों पक्षों में से $\widehat{CD}$ घटाने पर—

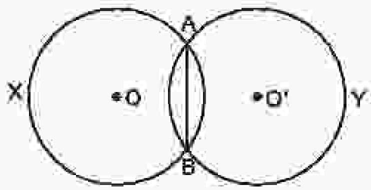
$$\widehat{ACD}-\widehat{CD}=\widehat{BDC}-\widehat{CD}$$

या $\widehat{AC}=\widehat{BD}$ या चाप AC = चाप BD

या चाप AC – चाप $BD = 0$ **उत्तर**

4. दो बराबर वृत्त AXB और AYB एक-दूसरे को बिन्दुओं A और B पर काटते हैं। सिद्ध कीजिए कि—

चाप AXB = चाप AYB



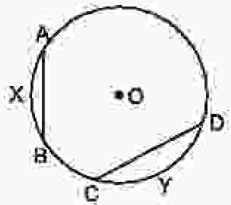
हल– दिया है—दो सर्वांगसम वृत्त AXB व AYB जिनके केन्द्र क्रमशः O व O' हैं।

हम जानते हैं कि सर्वांगसम वृत्तों की समान जीवाएँ समान चाप अंतरित करती है।

यहाँ जीवा AB उभयनिष्ठ है।

अतः चाप AXB = चाप AYX **इति सिद्धम्**

5. एक वृत्त का चाप AXB, चाप CYD का दो-तिहाई है, तो सिद्ध कीजिए कि जीवा AB और CD की लम्बाइयों का अनुपात 2 : 3 है।



हल– दिया है—वृत्त जिसका केन्द्र O है में चाप $AXB=\frac{2}{3}$ चाप CYD

या जीवा $AB=\frac{2}{3}$ जीवा CD

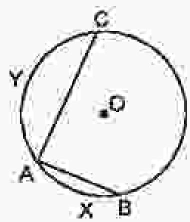
या $$\frac{\text{जीवा } AB}{\text{जीवा } CD}=\frac{2}{3}$$

या जीवा AB : जीवा $CD = 2 : 3$ **इति सिद्धम्**

6. एक वृत्त का चाप AXB, चाप CYD के बराबर है तो जीवा AB और CD की लम्बाइयों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल– इसके लिए प्रश्न नं० 2 का हल देखिए।

7. संलग्न चित्र में एक वृत्त का केन्द्र O है। इसके दो चाप AXB और CYA इस प्रकार हैं कि चाप $AXB=\frac{1}{2}$ चाप CYA है। जीवा AB और जीवा AC की लम्बाइयों में अनुपात ज्ञात कीजिए।



हल– दिया है— केन्द्र O वाले वृत्त में

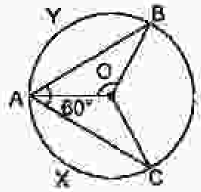
$$\text{चाप } AXB = \frac{1}{2} \text{ चाप } CYA$$

या $$\text{जीवा } AB = \frac{1}{2} \text{ जीवा } AC$$

या $$\frac{\text{जीवा } AB}{\text{जीवा } AC} = \frac{1}{2}$$

या जीवा AB : जीवा $AC = \mathbf{1:2}$ **उत्तर**

8. चित्र में, वृत्त की दो जीवाएँ AB और AC बराबर हैं। यदि $\angle BAC = 60°$ हो, तो चाप AXC का अंश माप ज्ञात कीजिए।



हल– दिए गए चित्र में,

दिया है— $\angle BAC = 60°$

तथा जीवा AB = जीवा AC

हम जानते हैं किसी वृत्त में समान जीवाएँ केन्द्र पर समान कोण अंतरित करती हैं।

अतः $\angle AOC = \angle AOB$

$\angle BOC = 2\angle BAC$ [$\because$ केन्द्र पर अंतरित कोण वृत्त पर अंतरित कोण का दो गुना होता है]

$= 2 \times 60° = 120°$

$\angle AOC + \angle AOB + \angle BOC = 360°$

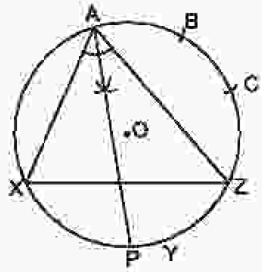
या $\angle AOC + \angle AOC + 120° = 360°$

या $2\angle AOC = 360° - 120° = 240°$

या $$\angle AOC = \frac{240°}{2} = 120°$$

अतः चाप AXC का अंश माप $= \mathbf{120°}$ है। **उत्तर**

9. सिद्ध कीजिए कि एक ही चाप द्वारा वृत्त के शेष भाग पर बने कोण की अर्द्धक रेखाएँ चाप के एक निश्चित बिन्दु से होकर जाती है।



हल– ज्ञात है—एक वृत्त जिसका केन्द्र O है। वृत्त का एक चाप XYZ है तथा शेष भाग पर अनेक बिन्दु A, B, C आदि हैं।

सिद्ध करना है—चाप XYZ द्वारा बिन्दुओं A, B, C आदि पर बने कोणों की अर्द्ध रेखाएँ एक निश्चित बिन्दु से होकर जाती है।

रचना—XA तथा ZA को मिलाया तथा $\angle XAZ$ का अर्द्धक किया। अर्द्धक रेखा चाप XYZ के बिन्दु P से होकर जाती है।

उपपत्ति—रेखा AP, $\angle XAZ$ का अर्द्धक है।

अतः $\angle XAP = \angle ZAP$

तब चाप XP = चाप ZP

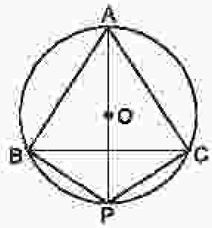
$\therefore$ बिन्दु P चाप XYZ का मध्य बिन्दु है।

अर्थात् चाप XYZ द्वारा बिन्दु A पर बने कोण की अर्द्धक रेखा चाप XYZ के मध्य बिन्दु से होकर जाती है।

इसी प्रकार, सिद्ध किया जा सकता है कि चाप XYZ के द्वारा बिन्दुओं B, C आदि पर बने कोणों की अर्द्धक रेखाएँ चाप XYZ के मध्य बिन्दु P से होकर जाती है। इति सिद्धम्

10. समबाहु त्रिभुज ABC के परिवृत्त में लघु चाप BC के मध्य कोई बिन्दु P लिया गया है। सिद्ध कीजिए कि रेखा खंड PA, $\angle BPC$ को अर्द्धित करता है।

हल– **ज्ञात है**—समबाहु ΔABC के परिवृत्त जिसका केन्द्र O है। लघु चाप BC का मध्य बिन्दु P है।



सिद्ध करना है—PA, $\angle BPC$ का अर्द्धक है

या $\angle BPA = \angle CPA$

उपपत्ति—समबाहु ΔABC में,

$$AB = AC = BC$$

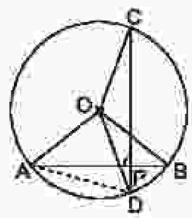
अर्थात् जीवा AB = जीवा AC

तब $\angle BPA = \angle CPA$

या PA, $\angle BPC$ का अर्द्धक है। इति सिद्धम्

11. यदि दो जीवाएँ वृत्त के अन्दर एक-दूसरे को प्रतिच्छेदित करें, तो सिद्ध कीजिए कि उनके बीच का कोण उनके द्वारा काटे चापों से केन्द्र पर अंतरित कोणों के योग के आधे के बराबर होता है।

हल– **ज्ञात है**—केन्द्र O वाले वृत्त की दो जीवाएँ AB व CD एक-दूसरे को बिन्दु P पर काटती है।



सिद्ध करना है— $\angle APC = \frac{1}{2}[\angle AOC + \angle DOB]$

रचना—केन्द्र O को बिन्दुओं A, B, C व D से मिलाया तथा A और D को मिलाया।

उपपत्ति—चूँकि ΔADP का एक बहिष्कोण APC है;

$\therefore$ $\angle APC = \angle ADP + \angle DAP$

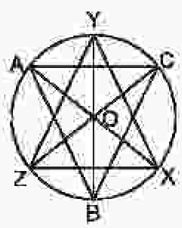
या $\angle APC = \angle ADC + \angle DAB$

या $\angle APC = \frac{1}{2}\angle AOC + \frac{1}{2}\angle DOB$

या $\angle APC = \frac{1}{2}(\angle AOC + \angle DOB)$ इति सिद्धम्

12. संलग्न चित्र में केन्द्र O वाले वृत के अन्तर्गत एक ΔABC खींचा गया है जिसके कोणों की अर्द्धक रेखाएँ वृत्त को क्रमशः बिन्दुओं X, Y और Z पर काटती हैं।

सिद्ध कीजिए कि ΔXYZ के $\angle X$, $\angle Y$ और $\angle Z$ क्रमशः $\frac{\angle B + \angle C}{2}$, $\frac{\angle C + \angle A}{2}$ और $\frac{\angle A + \angle B}{2}$ के बराबर हैं।



हल– दिए गए चित्रानुसार,

$\angle A$, $\angle B$ तथा $\angle C$ की अर्द्धक रेखाएँ क्रमशः AX, BY तथा CZ हैं।

ΔXYZ में,

$$\angle X = \angle ZXY = \angle ZXA + \angle YXA \qquad ...(1)$$

परन्तु $\angle ZXA = \angle ZCA = \dfrac{\angle C}{2}$ [∵ चाप AZ के कोण]

तथा $\angle YXA = \angle YBA = \dfrac{\angle B}{2}$ [∵ चाप YA के कोण]

$\angle ZXA$ तथा $\angle YXA$ के मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$\angle X = \frac{\angle C}{2} + \frac{\angle B}{2} = \frac{\angle C + \angle B}{2} = \frac{\angle B + \angle C}{2}$$

इसी प्रकार,

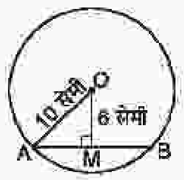
$$\angle Y = \angle XYZ = \angle XYB + \angle ZYB = \angle XAB + \angle ZCB$$
$$= \frac{\angle A}{2} + \frac{\angle C}{2}$$
$$= \frac{\angle A + \angle C}{2} = \frac{\angle C + \angle A}{2}$$

तथा
$$\angle Z = \angle YZX = \angle YZC + \angle XZC$$
$$= \angle YBC + \angle XAC$$
$$= \frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle A$$
$$= \frac{\angle B + \angle A}{2} = \frac{\angle A + \angle B}{2}$$

इति सिद्धम्

अभ्यास 11.2

1. संलग्न चित्र में एक वृत्त है, जिसका केन्द्र O है। त्रिज्या $OA = 10$ सेमी और जीवा AB पर डाला गया लम्ब $OM = 6$ सेमी है, तो AB का मान ज्ञात कीजिए।



हल– दिए गए चित्र में, $OA = 10$ सेमी, $OM = 6$ सेमी

तथा जीवा AB पर केन्द्र O से डाला गया लम्ब OM है।

अतः $AM = BM$

$$AB = AM + BM = AM + AM = 2AM$$

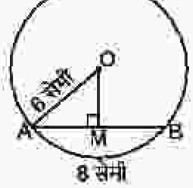
समकोण ΔOMA में,

$$OA^2 = OM^2 + AM^2 \quad \text{या} \quad AM^2 = OA^2 - OM^2$$

या
$$AM = \sqrt{OA^2 - OM^2} = \sqrt{10^2 - 6^2}$$
$$= \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8 \text{ सेमी}$$
$$AB = 2AM = 2 \times 8 = 16 \text{ सेमी}$$

उत्तर

2. एक वृत्त की त्रिज्या 6 सेमी है। उसकी एक जीवा $AB = 8$ सेमी हो, तो केन्द्र से उस जीवा की दूरी ज्ञात कीजिए।



हल– दिया है —6 सेमी त्रिज्या का एक वृत्त, जिसकी जीवा $AB = 8$ सेमी

वृत्त केन्द्र O से AB पर लम्ब OM डाला।

अतः $AM = MB = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{8}{2} = 4$ सेमी

केन्द्र से जीवा की दूरी $= OM$

समकोण ΔOMA में

$$OA^2 = OM^2 + AM^2$$

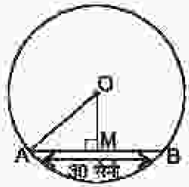
या $$OM^2 = OA^2 - AM^2$$

या $$OM = \sqrt{OA^2 - AM^2} = \sqrt{6^2 - 4^2}$$

$$= \sqrt{36-16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \text{ सेमी}$$ उत्तर

3. एक वृत्त में जिसका केन्द्र O तथा व्यास 34 सेमी, की एक जीवा $AB = 30$ सेमी है। जीवा AB की केन्द्र से दूरी ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है— एक वृत्त जिसका केन्द्र O तथा व्यास $= 34$ सेमी



अतः वृत्त की त्रिज्या $= \frac{34}{2} = 17$ सेमी

वृत्त की जीवा $AB = 30$ सेमी

चित्र से, OM जीवा AB पर लम्ब है।

अतः $$AM = \frac{AB}{2} = \frac{30}{2} = 15 \text{ सेमी}$$

तथा वृत्त की त्रिज्या $OA = 17$ सेमी

वृत्त के केन्द्र O से जीवा AB की दूरी $= OM$

समकोण ΔOMA में,

$$OA^2 = OM^2 + AM^2$$

या $$OM^2 = OA^2 - AM^2$$

या $$OM = \sqrt{OA^2 - AM^2} = \sqrt{17^2 - 15^2}$$

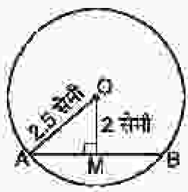
$$OM = \sqrt{289-225} = \sqrt{64} = 8 \text{ सेमी}$$

अतः दिए गए वृत्त के केन्द्र से दी गई जीवा की दूरी = 8 सेमी उत्तर

4. किसी वृत्त की त्रिज्या 2.5 सेमी और उसके केन्द्र से जीवा पर खींचा गया लम्ब 2 सेमी है। उस जीवा की माप की गणना कीजिए।

हल– माना चित्र में, वृत्त की त्रिज्या $OA = 2.5$ सेमी

जीवा AB पर केन्द्र से डाले गए लम्ब की माप $OM = 2$ सेमी



$\therefore$ समकोण ΔOMA में

$$OA^2 = OM^2 + AM^2$$

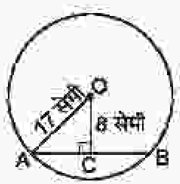
या $$AM^2 = OA^2 - OM^2$$

या $$AM = \sqrt{OA^2 - OM^2} = \sqrt{(2.5)^2 - 2^2}$$

$$= \sqrt{6.25-4} = \sqrt{2.25} = 1.5 \text{ सेमी}$$

जीवा AB की माप $= 2AM = 2 \times 1.5 = 3.0$ सेमी उत्तर

5. संलग्न चित्र में O वृत्त का केन्द्र है। वृत्त की त्रिज्या 17 सेमी है। यदि $OC = 8$ सेमी है, तो जीवा AB की लंबाई ज्ञात कीजिए।



हल– दिए गए चित्रानुसार,

समकोण ΔOAC में,

$$OA^2 = OC^2 + AC^2$$

या $$AC^2 = OA^2 - OC^2$$

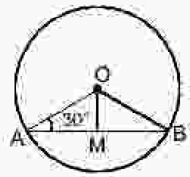
या $$AC = \sqrt{OA^2 - OC^2} \quad \text{या} \quad AC = \sqrt{17^2 - 8^2}$$

या $$AC = \sqrt{289 - 64} \quad \text{या} \quad AC = \sqrt{225}$$

या $AC = 15$ सेमी

अतः $AB = 2AC = 2 \times 15 = \mathbf{30}$ **सेमी** उत्तर

6. संलग्न चित्र में वृत्त का केन्द्र O और AB उसकी एक जीवा है, जिसका मध्य बिन्दु M है। यदि $\angle A = 30°$ हो, तो $\angle O$ का मान ज्ञात कीजिए।



हल– दिए गए चित्रानुसार,

बिन्दु M, जीवा AB का मध्य बिन्दु है।

अतः $OM \perp AB$ (जीवा के मध्य बिन्दु और केन्द्र को मिलाने वाली रेखा जीवा पर लम्ब होती है)

$$\angle OMA = \angle OMB = 90°$$
$$\angle AOM = 180° - (\angle OAM + \angle OMA)$$
$$= 180° - (30° + 90°)$$
$$= 180° - 120° = 60°$$

ΔOMA तथा ΔOMB में

$$AM = BM \quad \text{(दिया है)}$$
$$\angle OMA = \angle OMB = 90°$$

भुजा OM उभयनिष्ठ है।

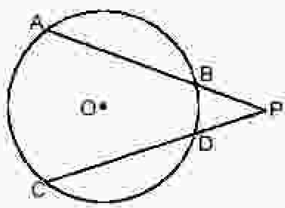
अतः $\Delta OMA \cong \Delta OMB$

अतः $\angle BOM = \angle AOM = 60°$

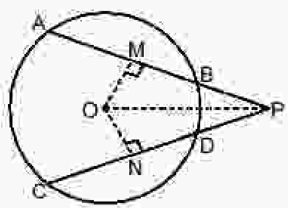
$$\angle O = \angle BOM + \angle AOM$$
$$= 60° + 60° = \mathbf{120°}$$ उत्तर

7. एक वृत्त $ABCD$ का केन्द्र O है। वृत्त की दो बराबर जीवाएँ AB व CD वृत्त के बाहर बिन्दु P पर मिलती हैं। सिद्ध कीजिए—

$$\mathbf{PB = PD}$$



हल– दिए गए चित्र में केन्द्र O से जीवा AB व CD पर लम्ब क्रमशः OM व ON डाले। OP को मिलाया।



दिया है— जीवा AB = जीवा CD

या $$\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD$$

या $$MB = ND$$

ΔPOM व ΔPON में,

$$OM = ON$$ ($\because$ वृत्त की समान जीवाएँ केन्द्र से बराबर दूरी पर होती हैं)

$$\angle OMP = \angle ONP = 90°$$

$$OP = OP \quad \text{(उभयनिष्ठ)}$$

$\therefore$ $\Delta POM \cong \Delta PON$ (S. A. S. सर्वांगसमता)

अतः $MP = NP$

या $MB + PB = ND + PD$

या $ND + PB = ND + PD$

या $\mathbf{PB = PD}$ **इति सिद्धम्**

8. किन्हीं दो वृत्तों के व्यासों का अनुपात 4 : 9 है। इन वृत्तों की परिधियों में अनुपात ज्ञात कीजिए।

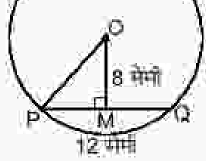
हल– माना दो वृत्तों के व्यास क्रमशः d_1 व d_2 हैं।

अतः प्रश्नानुसार, $d_1 : d_2 = 4 : 9$

वृत्तों की परिधियाँ $= \pi d_1$ व πd_2 होंगी।

$\therefore$ वृत्तों की परिधियों में अनुपात $= \dfrac{\pi d_1}{\pi d_2} = \dfrac{d_1}{d_2} = \dfrac{4}{9} = \mathbf{4 : 9}$ **उत्तर**

9. संलग्न चित्र में, एक वृत्त जिसका केन्द्र O है। जीवा PQ की लम्बाई 12 सेमी है तथा जीवा केन्द्र से 8 सेमी दूर है। वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ लीजिए)



हल– प्रश्नानुसार, जीवा $PQ = 12$ सेमी

अतः $PM = \dfrac{12}{2} = 6$ सेमी

समकोण ΔOMP में, $OP = \sqrt{PM^2 + OM^2}$

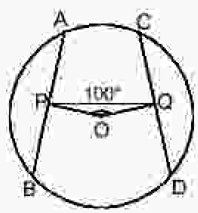
या $OP = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$ सेमी

अतः वृत्त की त्रिज्या $(r) = OP = 10$ सेमी

$\therefore$ वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2 = 3.14 \times (10)^2$

$= 3.14 \times 100 = \mathbf{314}$ **वर्ग सेमी** **उत्तर**

10. संलग्न चित्र में, वृत्त का केन्द्र O है, जिसकी दो समान जीवाएँ AB व CD हैं। केन्द्र O से दोनों जीवाओं पर डाले गए लम्ब क्रमशः OP व OQ हैं तथा $\angle POQ = 100°$ है, तो $\angle APQ$ का मान ज्ञात कीजिए।



हल– प्रश्नानुसार, दिए गए चित्र में,

जीवा $AB =$ जीवा CD

$OP \perp AB$

$\therefore$ $\angle APO = 90°$

तथा $OQ \perp CD$

$\angle CQO = 90°$

तथा $OP = OQ$ (वृत्त की समान जीवाओं की केन्द्र से दूरी समान होती है)

ΔOPQ में

$\angle OPQ = \angle OQP$ (समान भुजाओं के सम्मुख कोण)

$\angle OPQ + \angle OQP + \angle POQ = 180°$

$$\angle OPQ + \angle OPQ + 100^\circ = 180^\circ$$

या $$2\angle OPQ + 100^\circ = 180^\circ$$

या $$2\angle OPQ = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$$

या $$\angle OPQ = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ$$

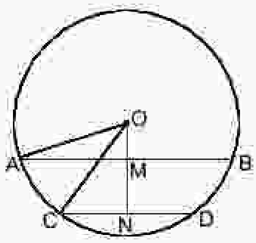
परन्तु $$\angle OPQ + \angle APQ = \angle APO$$

या $$\angle 40^\circ + \angle APQ = 90^\circ$$

या $$\angle APQ = 90^\circ - 40^\circ$$

या $$\angle APQ = \mathbf{50^\circ}$$ **उत्तर**

11. सिद्ध कीजिए कि किसी वृत्त में जो जीवा केन्द्र के निकट होती है, वह दूर वाली जीवा से बड़ी होती है।



हल– ज्ञात है—AB व CD वृत्त की दो जीवाएँ इस प्रकार हैं $AB > CD$। इनकी वृत्त के केन्द्र O से दूरियाँ क्रमशः OM और ON हैं।

सिद्ध करना है—$OM < ON$

रचना—रेखाखंड OA तथा OC खींचिए।

उपपत्ति—वृत्त के केन्द्र O से जीवाओं AB व CD की दूरियाँ क्रमशः OM तथा ON हैं।

$\therefore OM$ तथा ON क्रमशः जीवा AB व CD के लम्बार्द्धक हैं।

अतः $$\angle OMA = \angle ONC = 90^\circ$$

तथा $$AM = \frac{1}{2}AB \quad \text{तथा} \quad CN = \frac{1}{2}CD$$

ΔOMA व ΔONC दोनों समकोणीय हैं।

$\therefore$ समकोण ΔOMA में,

$$OA^2 = OM^2 + AM^2$$

या $$OA^2 = OM^2 + \left(\frac{1}{2}AB\right)^2$$

या $$OA^2 = OM^2 + \frac{AB^2}{4}$$

या $$4OA^2 = 4OM^2 + AB^2 \qquad ...(1)$$

तथा समकोण ΔONC में,

$$OC^2 = ON^2 + CN^2$$

$$= ON^2 + \left(\frac{1}{2}CD\right)^2 = ON^2 + \frac{CD^2}{4}$$

या $$4OC^2 = 4ON^2 + CD^2 \qquad ...(2)$$

$$OA = OC \qquad \text{(वृत्त की त्रिज्याएँ)}$$

या $$OA^2 = OC^2 \quad \text{या} \quad 4OA^2 = 4OC^2$$

या $$4OM^2 + AB^2 = 4ON^2 + CD^2$$

$$AB^2 - CD^2 = 4ON^2 - 4OM^2$$

या $$AB^2 - CD^2 = 4(ON^2 - OM^2)$$

दोनों पक्षों के परिणाम धनात्मक हैं, अतः

$$AB > CD$$

तब $$ON > OM$$

या $$OM < ON$$ इति सिद्धम्

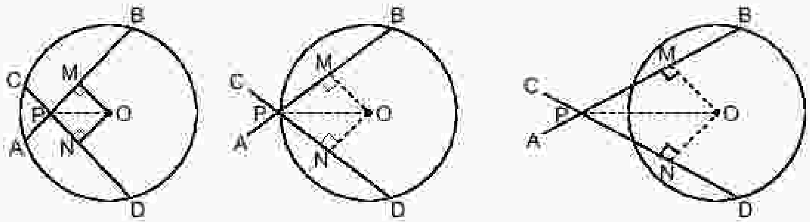
12. यदि वृत्त की दो बराबर जीवाएँ वृत्त के भीतर, वृत्त पर या वृत्त के बाहर प्रतिच्छेदित करती हैं तो सिद्ध कीजिए कि प्रतिच्छेद-बिन्दु को केन्द्र से मिलाने वाली रेखा जीवाओं के बीच के कोण को अर्द्धित करती हैं।

हल– ज्ञात है—केन्द्र O के वृत्त की दो बराबर जीवाएँ AB और CD जो बिन्दु P पर वृत्त के भीतर, वृत्त पर अथवा वृत्त के बाहर प्रतिच्छेदित करती हैं।

सिद्ध करना है—रेखाखंड OP $\angle BPD$ को अर्द्धित करता है। अर्थात्

$$\angle BPO = \angle DPO$$

रचना—केन्द्र O से AB और CD पर क्रमशः OM और ON लम्ब डाले।



उपपत्ति— जीवा AB = जीवा CD

$\therefore$ $OM = ON$ (वृत्त की बराबर जीवाएँ केन्द्र से बराबर दूरी पर होती हैं)

अब, ΔOPM और ΔOPN में,

$OM = ON$

$\angle OMP = \angle ONP$ (प्रत्येक समकोण है)

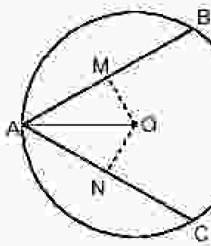
$OP = OP$ (उभयनिष्ठ है)

$\therefore$ $\Delta OPM \cong \Delta OPN$ (S. A. S. सर्वांगसमता)

अतः $\angle MPO = \angle NPO$

या $\angle BPO = \angle DPO$ इति सिद्धम्

13. किसी वृत्त की दो समान जीवाएँ AB व AC हैं। सिद्ध कीजिए कि $\angle BAC$ का अर्द्धक केन्द्र से होकर जाएगा।



हल– ज्ञात है—केन्द्र O के वृत्त की दो बराबर जीवाएँ AB और AC हैं।

सिद्ध करना है—$\angle BAC$ का अर्द्धक AO है।

अर्थात् $$\angle BAO = \angle CAO$$

रचना—केन्द्र O से जीवा AB और AC पर क्रमशः OM और ON लम्ब डाले।

उपपत्ति—ΔOMA और ΔOAN में

$\angle OMA = \angle ONA$ (प्रत्येक समकोण है)

$OM = ON$ (बराबर जीवाओं पर केन्द्र से लम्ब)

$OA = OA$ (उभयनिष्ठ है)

$\therefore$ $\Delta OMA = \Delta ONA$ (S.A.S. सर्वांगसमता)

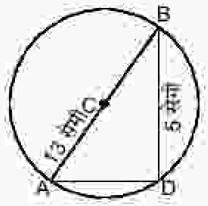
अत: $\angle MAO = \angle NAO$

या $\angle BAO = \angle CAO$

अर्थात् $\angle BAC$ का अर्द्धक AO है जो वृत्त के केन्द्र से होकर जाता है। **इति सिद्धम्**

अभ्यास 11.3

1. संलग्न चित्र में, C वृत्त का केन्द्र है। $AB = 13$ सेमी और $BD = 5$ सेमी है, तो AD की माप ज्ञात कीजिए।



हल– दिए गए चित्र से स्पष्ट है कि $\angle D$ अर्द्धवृत्त में स्थित कोण है।

अत: $\angle D = 90^\circ$ अर्थात् ΔABD एक समकोण त्रिभुज है।

जिसमें कर्ण $AB = 13$ सेमी,

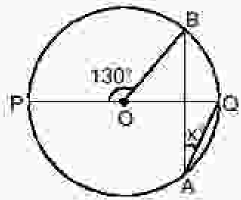
लम्ब $BD = 5$ सेमी, $AD = ?$

$\therefore$ समकोण ΔABD में, पाइथागोरस प्रमेय से

$$AB^2 = BD^2 + AD^2 \quad \text{या} \quad AD^2 = AB^2 - BD^2$$

या
$$AD = \sqrt{AB^2 - BD^2}$$
$$= \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25}$$
$$= \sqrt{144} = 12 \text{ सेमी}$$
उत्तर

2. संलग्न चित्र में, बिन्दु O वृत्त का केन्द्र है और $\angle BOP = 130^\circ$ है, तो x का अंशमाप ज्ञात कीजिए।



हल– दिए गए चित्रानुसार,

$\angle POB = 130^\circ$

तथा $\angle POB + \angle BOQ = 180^\circ$

या $130^\circ + \angle BOQ = 180^\circ$

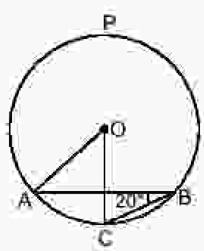
या $\angle BOQ = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$

$\angle BOQ$ तथा $\angle BAQ$ क्रमश: एक चाप द्वारा केन्द्र और वृत्त पर स्थित कोण हैं। अत:

$$\angle BOQ = 2\angle BAQ \quad \text{या} \quad \angle BOQ = 2x$$

या
$$x = \frac{\angle BOQ}{2} = \frac{50^\circ}{2} = 25^\circ$$
उत्तर

3. संलग्न चित्र में, O वृत्त $APBC$ का केन्द्र है। यदि $\angle ABC = 20^\circ$ हो, तो $\angle AOC$ की माप ज्ञात कीजिए।



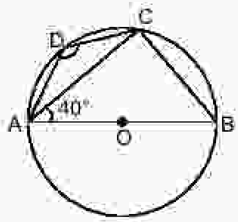
हल– दिए गए चित्रानुसार,

$\angle AOC$ तथा $\angle ABC$ एक ही चाप द्वारा क्रमश: केन्द्र और वृत्त पर अंतरित कोण है।

अतः $\angle AOC = 2\angle ABC$

या $\angle AOC = 2\times 20^\circ = \mathbf{40^\circ}$ **उत्तर**

4. $ABCD$ एक चतुर्भुज है, जिसके सभी शीर्ष एक वृत्त पर स्थित हैं और भुजा AB, वृत्त के केन्द्र O से होकर जाती है। यदि $\angle CAB = 40^\circ$ हो, तो $\angle CDA$ की माप ज्ञात कीजिए।



हल– दिए गए चित्रानुसार,

$\angle ACB$ अर्द्धवृत्त में स्थित कोण है।

अतः $\angle ACB = 90^\circ$

अब ΔABC में,

$\angle ACB + \angle ABC + \angle CAB = 180^\circ$

या $90^\circ + \angle ABC + 40^\circ = 180^\circ$

या $\angle ABC + 130^\circ = 180^\circ$

या $\angle ABC = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$

चूँकि चतुर्भुज $ABCD$ के सभी शीर्ष वृत्त पर स्थित हैं।

अतः चतुर्भुज $ABCD$ एक चक्रीय चतुर्भुज है।

$\angle CDA + \angle ABC = 180^\circ$ (चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण)

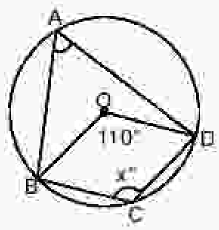
या $\angle CDA + 50^\circ = 180^\circ$

या $\angle CDA = 180^\circ - 50^\circ$

या $\angle CDA = \mathbf{130^\circ}$ **उत्तर**

5. संलग्न चित्र में O वृत्त का केन्द्र है। कोण x का अंशमाप ज्ञात कीजिए।

हल– दिए गए चित्रानुसार,



$\angle BOD$ और $\angle BAD$ एक ही चाप द्वारा केन्द्र और वृत्त पर अंतरित कोण हैं।

अतः $\angle BOD = 2\angle BAD$

या $\angle BAD = \dfrac{\angle BOD}{2} = \dfrac{110^\circ}{2} = 55^\circ$

अब, $\angle BAD$ और $\angle BCD$ चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण हैं।

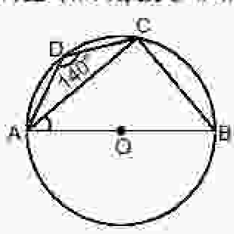
$\therefore$ $\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$

या $55^\circ + x = 180^\circ$

या $x = 180^\circ - 55^\circ$

या $x = \mathbf{125^\circ}$ **उत्तर**

6. संलग्न चित्र में, $ABCD$ एक चक्रीय चतुर्भुज है, जिसकी भुजा AB शीर्ष A, B, C तथा D से होकर जाने वाले वृत्त का व्यास है। यदि $\angle ADC = 140^\circ$ हो, तो $\angle BAC$ ज्ञात कीजिए।



हल– दिए गए चित्रानुसार, $ABCD$ एक चक्रीय चतुर्भुज है।

$\therefore$ $\angle ADC + \angle ABC = 180^\circ$

या $140^\circ + \angle ABC = 180^\circ$

या $\angle ABC = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$

तथा $\angle ACB$ अर्द्धवृत्त में स्थित है।

$\therefore \quad \angle ACB = 90^\circ$

अब ΔABC में,

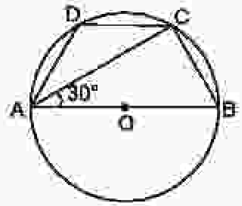
$\angle BAC + \angle ACB + \angle ABC = 180^\circ$

या $\quad \angle BAC + 90^\circ + 40^\circ = 180^\circ$

या $\quad \angle BAC + 130^\circ = 180$

या $\quad \angle BAC = 180^\circ - 130^\circ = \mathbf{50^\circ}$ उत्तर

7. संलग्न चित्र में, वृत्त का केन्द्र O है। यदि $\angle BAC = 30^\circ$ हो, तो $\angle ADC$ की माप ज्ञात कीजिए।



हल– दिए गए चित्रानुसार, $\angle ACB$ अर्द्धवृत्त में स्थित कोण है।

$\therefore \quad \angle ACB = 90^\circ$

ΔABC में,

$\angle ACB + \angle BAC + \angle ABC = 180^\circ$

या $\quad 90^\circ + 30^\circ + \angle ABC = 180^\circ$

या $\quad 120^\circ + \angle ABC = 180^\circ$

या $\quad \angle ABC = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

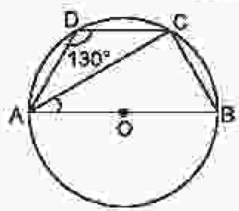
चतुर्भुज $ABCD$ एक चक्रीय चतुर्भुज है।

$\therefore \quad \angle ADC + \angle ABC = 180^\circ$

या $\quad \angle ADC + 60^\circ = 180^\circ$

या $\quad \angle ADC = 180^\circ - 60^\circ = \mathbf{120^\circ}$ उत्तर

8. संलग्न चित्र में, बिन्दुओं A, B, C और D से होकर जाने वाले वृत्त का केन्द्र O है। यदि $\angle ADC = 130^\circ$ है, तो $\angle BAC$ का मान ज्ञात कीजिए।



हल– दिए गए चित्रानुसार,

चतुर्भुज $ABCD$ एक चक्रीय चतुर्भुज है। जिसका $\angle ADC = 130^\circ$

$\therefore \quad \angle ADC + \angle ABC = 180^\circ$ (चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण)

या $\quad 130^\circ + \angle ABC = 180^\circ$

या $\quad \angle ABC = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$

$\because \angle ACB$ अर्द्धवृत्त में स्थित है।

$\therefore \quad \angle ACB = 90^\circ$

ΔABC में,

$\angle BAC + \angle ACB + \angle ABC = 180^\circ$

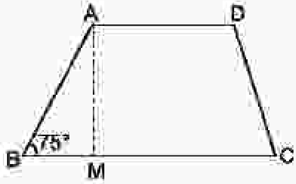
या $\quad \angle BAC + 90^\circ + 50^\circ = 180^\circ$

या $\quad \angle BAC + 140^\circ = 180^\circ$

या $\quad \angle BAC = 180^\circ - 140^\circ = \mathbf{40^\circ}$ उत्तर

9. $ABCD$ का एक समलम्ब चक्रीय चतुर्भुज है, जिसमें AD समान्तर BC है। यदि $\angle B = 75^\circ$ हो, तो अन्य कोणों की माप ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—$ABCD$ एक समलम्ब चक्रीय चतुर्भुज है जिसमें, $AD \parallel BC$ तथा $\angle B = 75^\circ$



$\therefore$ $\angle B + \angle D = 180°$

या $75° + \angle D = 180°$

या $\angle D = 180° - 75°$

$= 105°$

शीर्ष A से भुजा BC पर AM लम्ब डाला।

$\therefore$ $\angle AMB = 90°$

ΔABM में,

$\angle ABM + \angle AMB + \angle BAM = 180°$

या $75° + 90° + \angle BAM = 180°$

या $165° + \angle BAM = 180°$

या $\angle BAM = 180° - 165° = 15°$

$\angle MAD = \angle AMB = 90°$ (एकान्तर कोण)

अतः $\angle A = \angle BAM + \angle MAD$

$= 15° + 90° = 105°$

अब $\angle A + \angle C = 180°$ (चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण)

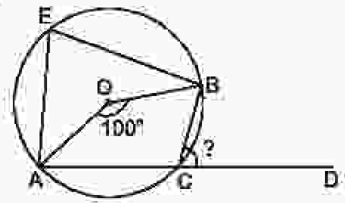
या $105° + \angle C = 180°$

या $\angle C = 180° - 105° = 75°$

अतः दिए गए समलम्ब चक्रीय चतुर्भुज के कोण

$\angle A = 105°$, $\angle C = 75°$ तथा $\angle D = 105°$ **उत्तर**

10. चित्र में O वृत्त का केन्द्र है तथा $\angle AOB = 100°$ हो, तो $\angle BCD$ का मान ज्ञात कीजिए।



हल– दिए गए चित्र में, $\angle AOB = 100°$

$\because$ $\angle AOB$ तथा $\angle AEB$ एक ही चाप द्वारा क्रमशः केन्द्र और वृत्त पर अंतरित कोण हैं।

$\therefore$ $\angle AOB = 2\angle AEB$

या $\angle AEB = \frac{\angle AOB}{2} = \frac{100°}{2} = 50°$

$\angle AEB + \angle ACB = 180°$ (चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण)

या $50° + \angle ACB = 180°$

या $\angle ACB = 180° - 50° = 130°$

$\angle ACB + \angle BCD = 180°$

या $130° + \angle BCD = 180°$

या $\angle BCD = 180° - 130° = 50°$ **उत्तर**

11. किसी चक्रीय चतुर्भुज में दो सम्मुख कोण इस प्रकार से हैं कि एक कोण दूसरे कोण का तिगुना हो, तो बड़े कोण का मान ज्ञात कीजिए।

हल– माना चक्रीय चतुर्भुज के दो सम्मुख कोण A और B हैं।

तथा $A > B$

प्रश्नानुसार, $A = 3B$ ...(1)

परन्तु, चक्रीय चतुर्भुज के नियमानुसार,

$$A + B = 180°$$

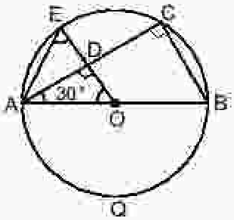
या $\quad 3B + B = 180°$ (समीकरण (1) से)

या $\quad 4B = 180°$

या $\quad B = \frac{180°}{4} = 45°$ (समीकरण (1) में रखने पर)

$$A = 3 \times 45° = 135°$$ उत्तर

12. दिए गए चित्र में, AOB वृत्त का एक व्यास है। वृत्त के केन्द्र O को जीवा AC के मध्य बिन्दु D से मिलाकर आगे बढ़ाया गया है जो वृत्त को बिन्दु E पर मिलाता है। यदि $\angle CAB = 30°$ हो, तो $\angle AED$ की माप ज्ञात कीजिए।



हल– दिए गए चित्र में, $\quad \angle CAB = 30°$

या $\quad \angle DAO = 30°$

$\angle ADO = 90°$ ($\because$ बिन्दु D जीवा AC का मध्य बिन्दु है)

$\therefore \Delta ADO$ में,

$$\angle DAO + \angle ADO + \angle AOD = 180°$$

या $\quad 30° + 90° + AOD = 180°$

या $\quad 120° + \angle AOD = 180°$

या $\quad \angle AOD = 180° - 120° = 60°$

या $\quad \angle AOE = 60°$

$OA = OE$ (प्रत्येक वृत्त की त्रिज्या है)

$\therefore \quad \angle AEO = \angle OAE$ (बराबर भुजा के सामने कोण)

ΔAEO में,

$$\angle AEO + \angle OAE + \angle AOE = 180°$$

$$\angle AEO + \angle AEO + 60° = 180°$$

या $\quad 2\angle AEO = 180° - 60° = 120°$

या $\quad \angle AEO = \frac{120}{2} = 60°$

या $\quad AED = 60°$ उत्तर

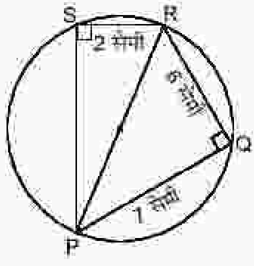
13. $PQRS$ एक चक्रीय चतुर्भुज है। PR, वृत्त का व्यास है। यदि $PQ = 7$ सेमी, $QR = 6$ सेमी और $RS = 2$ सेमी है तो PS की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल– प्रश्नानुसार, $PQRS$ एक चक्रीय चतुर्भुज है। PR वृत्त का व्यास है।

भुजा $PQ = 7$ सेमी, $QR = 6$ सेमी तथा $RS = 2$ सेमी है।

$\because \Delta PQR$ अर्द्धवृत्त में स्थित है।

$\therefore \Delta PQR$ समकोणीय है।



अतः समकोण ΔPQR में, पाइथागोरस प्रमेय से,

$$PR^2 = PQ^2 + QR^2$$

$$= 7^2 + 6^2 = 49 + 36$$

$$PR^2 = 85$$

इसी प्रकार, ΔPSR भी अर्द्धवृत्त में स्थित है।

अतः ΔPSR समकोणीय है।

$\therefore$ पाइथागोरस प्रमेय से,

$$PR^2 = RS^2 + PS^2 \quad \text{या} \quad 85 = 2^2 + PS^2$$

या $$85 = 4 + PS^2 \quad \text{या} \quad PS^2 = 85 - 4$$

या $$PS^2 = 85 - 4 = 81$$

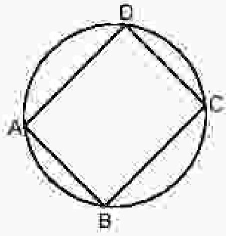
या $$PS = \sqrt{81} = 9 \text{ सेमी}$$ **उत्तर**

14. सिद्ध कीजिए कि वृत्त के अन्तर्गत खींचा गया समान्तर चतुर्भुज आयत होता है।

हल– ज्ञात है—$ABCD$ वृत्त के अन्तर्गत खींचा गया समान्तर चतुर्भुज है।

सिद्ध करना है—$ABCD$ एक आयत है।

अर्थात् $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$



उपपत्ति— $\therefore ABCD$ एक समान्तर चतुर्भुज है।

$\because$ इसके सम्मुख कोण बराबर होंगे।

$$\angle A = \angle C \quad ...(1)$$

तथा $$\angle B = \angle D \quad ...(2)$$

$\therefore ABCD$ वृत्त के अन्तर्गत खींचा गया है।

$\because ABCD$ एक चक्रीय चतुर्भुज है।

चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का योग $180°$ होता है।

अतः $$\angle A + \angle C = 180°$$

या $$\angle A + \angle A = 180° \quad \text{(समीकरण (1) से)}$$

या $$2\angle A = 180°$$

$$\angle A = 90° = \angle C$$

इसी प्रकार, $$\angle B + \angle D = 180°$$

या $$\angle B + \angle B = 180° \quad \text{(समीकरण (2) से)}$$

या $$2\angle B = 180°$$

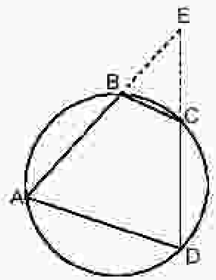
या $$\angle B = 90° = \angle D$$

इस प्रकार, चतुर्भुज $ABCD$ में,

$$\angle A = \angle B = \angle C = D = 90°$$

अतः चतुर्भुज **$ABCD$ एक आयत** है। **इति सिद्धम्**

15. चक्रीय चतुर्भुज $ABCD$ की दो सम्मुख भुजाएँ AB और DC बढ़ाने पर एक-दूसरे को बिन्दु E पर प्रतिच्छेद करती हैं। सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज EAD और त्रिभुज ECB समरूप हैं।



हल– ज्ञात है—$ABCD$ एक चक्रीय चतुर्भुज है, जिसकी भुजाओं AB तथा DC को बढ़ाने पर वे परस्पर एक-दूसरे को बिन्दु E पर प्रतिच्छेद करती हैं।

सिद्ध करना है—ΔEAD और ΔECB समरूप हैं।

उपपत्ति—चूँकि $ABCD$ एक चक्रीय चतुर्भुज है और इसकी भुजाओं AB तथा DC को आगे बढ़ाया गया है।

$\therefore$ बहिष्कोण $\angle EBC = \angle D$

तथा बहिष्कोण $\angle ECB = \angle A$

ΔEAD तथा ΔECB में,

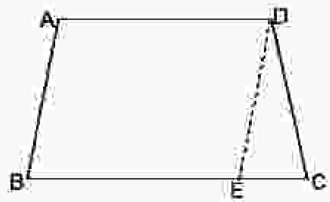
$\angle EBC = \angle D$ (ऊपर सिद्ध किया है)

$\angle ECB = \angle A$ (ऊपर सिद्ध किया है)

$\angle E = \angle E$ (उभयनिष्ठ कोण है)

अतः ΔEAD और ΔECB समकोणिक अर्थात् समरूप हैं। **इति सिद्धम्**

16. यदि किसी समलम्ब की दो असमान्तर भुजाएँ समान लम्बाई की हैं, तो सिद्ध कीजिए कि वह समलम्ब एक चक्रीय चतुर्भुज होता है।



हल– ज्ञात है—समलम्ब $ABCD$ जिसमें

भुजा AB = भुजा DC

सिद्ध करना है—$ABCD$ एक चक्रीय चतुर्भुज है।

रचना—भुजा AB के समान्तर रेखाखंड DE खींचा।

उपपत्ति—समान्तर चतुर्भुज $ABED$ में,

$\angle DAB = \angle DEB$ ...(1)

$AB = DC$ (ज्ञात है)

$AB = DE$ (समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ)

अतः $DC = DE$

$\therefore \Delta DCE$ एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

अतः $\angle DEC = \angle DCE$ ...(2)

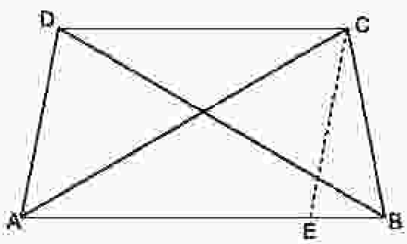
अब, $\angle DEC + \angle DEB = 180°$

या $\angle DCE + \angle DAB = 180°$ (समीकरण (1) व (2) से)

अर्थात् चतुर्भुज $ABCD$ के दो सम्मुख कोणों का योग 180° है।

अतः चतुर्भुज **$ABCD$ एक चक्रीय चतुर्भुज** है। **इति सिद्धम्**

17. एक चक्रीय चतुर्भुज $ABCD$ की दो भुजाएँ AB और CD समान्तर हैं। सिद्ध कीजिए कि भुजाएँ AD और BC आपस में बराबर हैं और विकर्ण AC तथा BD भी बराबर हैं।



हल– ज्ञात है—$ABCD$ एक चक्रीय चतुर्भुज है जिसमें भुजाएँ AB और CD समान्तर हैं।

सिद्ध करना है—भुजा AD = भुजा BC

तथा विकर्ण AC = विकर्ण BD

रचना—भुजा AD के समान्तर रेखाखण्ड CE खींचा।

उपपत्ति—समान्तर चतुर्भुज $AECD$ में

$AD = CE$

तथा $\angle CDA = \angle AEC$ ...(1)

चक्रीय चतुर्भुज $ABCD$ में

$\angle CDA + \angle CBA = 180°$

या $\angle AEC + \angle CBA = 180°$ (समीकरण (1) से)

या $\qquad \angle AEC + \angle CBE = 180^\circ$ ...(2)

अब, $\qquad \angle AEC + \angle CEB = 180^\circ$ ...(3)

समीकरण (2) व (3) से

$$\angle AEC + \angle CBE = \angle AEC + \angle CEB$$

$$\angle CBE = \angle CEB$$

अतः $\qquad CE = BC$

परन्तु $\qquad CE = AD$

अतः $\qquad \boldsymbol{AD = BC}$

अब, ΔACD और ΔBDC में,

$AD = BC$ (सिद्ध किया गया है)

$\angle DAC = \angle DBC$

(समान खंड बराबर कोण अंतरित करते हैं)

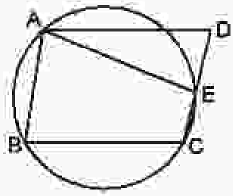
$DC = DC$ (उभयनिष्ठ)

$\therefore \qquad \Delta ACD \cong \Delta BDC$

अतः $\qquad \boldsymbol{AC = BD}$ इति सिद्धम्

18. *ABCD* एक समान्तर चतुर्भुज है। शीर्षों *A, B* तथा *C* से जाने वाला वृत्त *CD* को बिन्दु *E* पर प्रतिच्छेद करता है। सिद्ध कीजिए कि—

$$\boldsymbol{AE = AD}$$



हल- ज्ञात है—*ABCD* एक समान्तर चतुर्भुज है जिसके शीर्षों *A, B* और *C* से होकर जाने वाला वृत्त भुजा *CD* को बिन्दु *E* पर प्रतिच्छेद करता है।

सिद्ध करना है— $\qquad AE = AD$

उपपत्ति—$\because$ *ABCD* एक समान्तर चतुर्भुज है।

$\therefore \qquad \angle B = \angle D$ ...(1)

(समान्तर चतुर्भुज के सम्मुख कोण बराबर होते हैं)

$\because$ *A, B* व *C* से होकर जाने वाला वृत्त *CD* को बिन्दु *E* पर काटता है।

$\therefore$ *ABCD* एक चक्रीय चतुर्भुज है।

अतः बहिष्कोण $\qquad \angle AED = \angle B$ ...(2)

समीकरण (1) व (2) से

$$\angle AED = \angle D \quad (= \angle ADE)$$

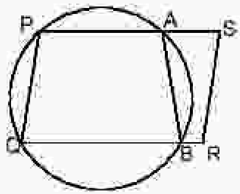
ΔADE में,

$$\angle AED = \angle ADE$$

अतः $\qquad$ भुजा $AD =$ भुजा AE

या $\qquad AD = AE$ इति सिद्धम्

19. एक समान्तर चतुर्भुज *PQRS* के शीर्ष *P* तथा *Q* से होकर एक वृत्त खींचा गया है, जो भुजा *PS* को बिन्दु *A* पर और भुजा *QR* को बिन्दु *B* पर प्रतिच्छेद करता है। सिद्ध कीजिए कि *ABRS* एक चक्रीय चतुर्भुज है।



हल– ज्ञात है—$PQRS$ एक समान्तर चतुर्भुज है। शीर्ष P व Q से होकर खींचा गया वृत्त भुजा PS को बिन्दु A पर और भुजा QR को बिन्दु B पर प्रतिच्छेद करता है।

सिद्ध करना है—चतुर्भुज $ABRS$ एक चक्रीय चतुर्भुज है।

उपपत्ति—$\because$ $PQRS$ एक समान्तर चतुर्भुज है।

$\therefore$ $$\angle PQR + \angle SRQ = 180^\circ$$

(समान्तर चतुर्भुज के आसन्न कोणों का योग 180° होता है)

या $$\angle PQB + \angle SRB = 180^\circ \quad ...(1)$$

P व Q से होकर जाने वाला वृत्त PS को A पर तथा QR को B पर प्रतिच्छेद करता है।

अतः चतुर्भुज $PQBA$ एक चक्रीय चतुर्भुज है।

बहिष्कोण $$\angle SAB = \angle PQB \quad ...(2)$$

समीकरण (1) व (2) से

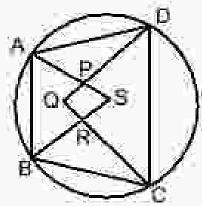
$$\angle SAB + \angle SRB = 180^\circ$$

अब चतुर्भुज $ABRS$ में,

$$\angle SAB + \angle SRB = 180^\circ$$

अतः चतुर्भुज **$ABRS$ एक चक्रीय चतुर्भुज** है। **इति सिद्धम्**

20. सिद्ध कीजिए कि किसी चतुर्भुज के अंत:कोण समद्विभाजकों द्वारा बना चतुर्भुज चक्रीय होता है।



हल– ज्ञात है—$ABCD$ एक चतुर्भुज है जिसके कोण समद्विभाजक AS, BS, CQ व DQ परस्पर एक-दूसरे को बिन्दुओं P, Q, R, S पर प्रतिच्छेदित करते हैं।

सिद्ध करना है—चतुर्भुज $PQRS$ एक चक्रीय चतुर्भुज है।

उपपत्ति—$\because$ AS व BS क्रमशः कोण $\angle A$ व $\angle B$ के समद्विभाजक हैं।

$\therefore$ $$\angle SAB = \frac{1}{2}\angle A$$

तथा $$\angle ABS = \frac{1}{2}\angle B$$

ΔABS में,

$$\angle SAB + \angle ABS + \angle S = 180^\circ$$

या $$\frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B + \angle S = 180^\circ$$

या $$\frac{1}{2}(\angle A + \angle B) + \angle S = 180^\circ$$

या $$180^\circ - \angle S = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B) \quad ...(1)$$

इसी प्रकार CQ व DQ क्रमशः $\angle C$ व $\angle D$ के समद्विभाजक हैं।

$\therefore$ $$\angle QCD = \frac{1}{2}\angle C$$

तथा $$\angle CDQ = \frac{1}{2}\angle D$$

ΔQCD में,

$$\angle QCD + \angle CDQ + \angle Q = 180^\circ$$

या $$\frac{1}{2}\angle C + \frac{1}{2}\angle D + Q = 180^\circ$$

या $$\frac{1}{2}(\angle C + \angle D) = 180^\circ - \angle Q$$

या $$180^\circ - \angle Q = \frac{1}{2}(\angle C + \angle D) \quad ...(2)$$

समीकरण (1) व (2) को जोड़ने पर

$$(180^\circ - \angle S) + (180^\circ - \angle Q) = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B) + \frac{1}{2}(\angle C + \angle D)$$

या $$180^\circ - \angle S + 180^\circ - \angle Q = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B + \angle C + \angle D)$$

या $$360^\circ - (\angle S + \angle Q) = \frac{1}{2} \times 360^\circ$$

या $$360^\circ - (\angle S + \angle Q) = 180^\circ$$

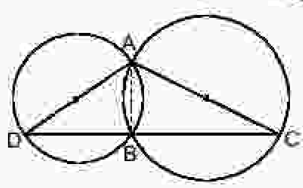
या $$\angle S + \angle Q = 360^\circ - 180^\circ$$

या $$\angle S + \angle Q = 180^\circ$$

या चतुर्भुज $PQRS$ में $\angle S + \angle Q = 180^\circ$

अतः चतुर्भुज ***PQRS* एक चक्रीय चतुर्भुज** है। **इति सिद्धम्**

21. दो वृत्त बिन्दु A व बिन्दु B पर प्रतिच्छेदित होते हैं। यदि AD व AC दोनों वृत्तों के व्यास हैं, तो सिद्ध कीजिए कि बिन्दु B रेखाखंड DC पर पड़ता है।



हल– प्रश्नानुसार, AD व AC वृत्तों के व्यास हैं।

अतः बिन्दु B प्रत्येक वृत्त के अर्द्धवृत्त पर स्थित है।

$\therefore$ $\angle ABD = 90^\circ$ तथा $\angle ABC = 90^\circ$

अतः $$\angle ABD + \angle ABC = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

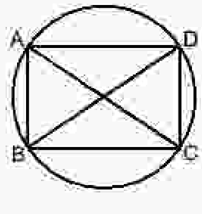
या $$\angle DBC = 180^\circ$$

अर्थात् DBC एक ऋजु रेखा है।

अतः **बिन्दु B रेखाखंड DC पर स्थित** है। **इति सिद्धम्**

22. यदि किसी चक्रीय चतुर्भुज के विकर्ण चतुर्भुज के शीर्षों से होकर जाने वाले वृत्त के व्यास हैं, तो सिद्ध कीजिए कि यह एक आयत है।

हल– ज्ञात है—$ABCD$ एक चक्रीय चतुर्भुज है जिसके विकर्ण AC व BD शीर्षों A, B, C व D से होकर जाने वाले वृत्त के व्यास हैं।



सिद्ध करना है—चतुर्भुज $ABCD$ एक आयत है।

उपपत्ति—$\because$ $ABCD$ एक चक्रीय चतुर्भुज है।

$\therefore$ $$\angle A + \angle C = 180^\circ \quad ...(1)$$

तथा $$\angle B + \angle D = 180^\circ \quad ...(2)$$

$\because$ विकर्ण AC वृत्त का व्यास है।

$\therefore \angle B$ अर्द्धवृत्त पर स्थित है।

अतः $\angle B = 90°$ यह मान समीकरण (2) में रखने पर

$$90° + \angle D = 180°$$

या $\angle D = 180° - 90° = 90°$

इसी प्रकार विकर्ण BD भी वृत्त का व्यास है।

अतः $\angle A$ अर्द्धवृत्त में स्थित है।

$\therefore \angle A = 90°$ यह मान समीकरण (1) में रखने पर

$$90° + \angle C = 180°$$

या $\angle C = 180° - 90° = 90°$

$\because$ चक्रीय चतुर्भुज $ABCD$ में $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$

अतः $ABCD$ एक आयत है। इति सिद्धम्

बहुविकल्पीय प्रश्न

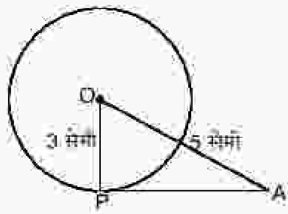
नोट—बहुविकल्पीय प्रश्नों के उत्तर जानने के लिए पाठ्य-पुस्तक के पृष्ठ संख्या 219 से 223 का अवलोकन कीजिए।

12

वृत्त की स्पर्श रेखा
(Tangent to a Circle)

अभ्यास 12.1

1. 3 सेमी त्रिज्या के वृत्त के बाहर केन्द्र से 5 सेमी की दूरी पर स्थित किसी बाह्य बिन्दु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखा की माप ज्ञात कीजिए।



हल– **दिया है**—वृत्त की त्रिज्या $OP = 3$ सेमी

वृत्त के केन्द्र O से बाह्य बिन्दु A की दूरी $OA = 5$ सेमी

ज्ञात करना है—बाह्य बिन्दु A से वृत्त पर स्थित बिन्दु P पर खींची गई स्पर्श रेखा AP की माप।

हम जानते हैं कि— स्पर्श रेखा बिन्दु से जाने वाली त्रिज्या पर लम्ब होती है।

अत: समकोण ΔOPA में,

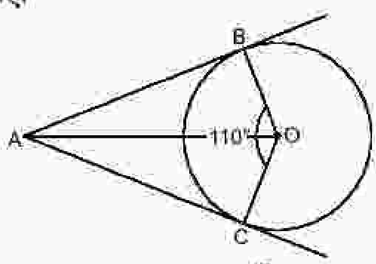
$$OA^2 = OP^2 + AP^2$$

या $$AP^2 = OA^2 - OP^2$$

या $$AP = \sqrt{OA^2 - OP^2} = \sqrt{5^2 - 3^2}$$

$$= \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4 \text{ सेमी}$$ **उत्तर**

2. चित्र (i) में केन्द्र पर $\angle BOC = 110°$, AB तथा AC वृत्त की स्पर्श रेखाएँ हैं। $\angle OAB$ की माप ज्ञात कीजिए।



(i)

हल– दिए गए चित्रानुसार,

$$\angle AOB = \frac{1}{2} \angle BOC = \frac{1}{2} \times 110° = 55°$$

$$\angle ABO = 90°$$ (स्पर्श रेखा स्पर्श बिन्दु से जाने वाली त्रिज्या पर लम्ब होती है)

ΔAOB में,

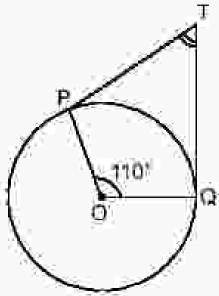
$$\angle OAB + \angle AOB + \angle ABO = 180°$$

या $\angle OAB + 55° + 90° = 180°$

या $\angle OAB + 145° = 180°$

या $\angle OAB = 180° - 145° = 35°$ **उत्तर**

3. चित्र (ii) में, यदि TP और TQ केन्द्र O वाले वृत्त की दो स्पर्श रेखाएँ हैं तथा $\angle POQ = 110°$, तो $\angle PTQ$ का मान ज्ञात कीजिए।



(ii)

हल– $\because$ TP व TQ केन्द्र O वाले वृत्त की स्पर्श रेखाएँ हैं।

अत: $\angle OPT = OQT = 90°$

$\Rightarrow \angle OPT + \angle OQT = 90° + 90° = 180°$

दिया है— $\angle POQ = 110°$

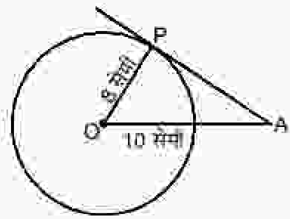
$\therefore$ चतुर्भुज $OPTQ$ में सम्मुख कोण

$\angle POQ + \angle PTQ = 180°$

या $110° + \angle PTQ = 180°$

या $\angle PTQ = 180° - 110° = 70°$ **उत्तर**

4. 8 सेमी त्रिज्या के वृत्त के बाहर केन्द्र से 10 सेमी की दूरी पर स्थित किसी बाह्य बिन्दु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखा की माप ज्ञात कीजिए।



हल– दिया है—वृत्त की त्रिज्या $OP = 8$ सेमी

वृत्त के केन्द्र O से बाह्य बिन्दु A की दूरी

$OA = 10$ सेमी

$AP = ?$

$\because$ AP वृत्त की स्पर्श रेखा है।

अत: समकोण OPA में,

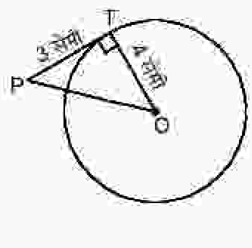
$OA^2 = AP^2 + OP^2$

या $AP^2 = OA^2 - OP^2$

या $AP = \sqrt{OA^2 - OP^2} = \sqrt{10^2 - 8^2}$

$= \sqrt{100 - 64} = \sqrt{36} = 6$ **सेमी** **उत्तर**

5. एक 4 सेमी त्रिज्या के वृत्त पर किसी बाहरी बिन्दु से स्पर्श रेखा खींची जाती है। यदि स्पर्श रेखा की माप 3 सेमी है, तो बिन्दु की वृत्त के केन्द्र से दूरी ज्ञात कीजिए।



हल– दिया है—वृत्त की त्रिज्या $OT = 4$ सेमी

बाह्य बिन्दु P से स्पर्श रेखा की माप $PT = 3$ सेमी

वृत्त के केन्द्र O से बाह्य बिन्दु की दूरी $OP = ?$

समकोण ΔOTP में,

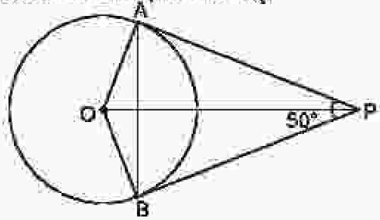
$OP^2 = PT^2 + OT^2$

या $OP = \sqrt{PT^2 + OT^2}$

$= \sqrt{3^2 + 4^2}$

$= \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$ **सेमी** **उत्तर**

6. चित्र में O वृत्त का केन्द्र है, PA और PB वृत्त की बिन्दु P से स्पर्श रेखाएँ हैं और $\angle APB = 50°$, $\angle OAB$ की माप ज्ञात कीजिए।



हल– चित्रानुसार,

$$\angle APB = 50°$$

$\because$ PA और PB वृत्त की स्पर्श रेखाएँ हैं।

$$\therefore \quad \angle OAP = \angle OBP = 90°$$

अतः $\quad \angle OAP + \angle OBP = 90° + 90° = 180°$

$\therefore$ चतुर्भुज $OAPB$ में सम्मुख कोण

$$\angle AOB + \angle APB = 180°$$

या $\quad \angle AOB + 50° = 180°$

या $\quad \angle AOB = 180° - 50° = 130°$

अब, ΔOAB में,

भुजा OA = भुजा OB (प्रत्येक वृत्त की त्रिज्या)

$\Rightarrow \quad \angle OBA = \angle OAB \quad ...(1)$

पुनः ΔOAB में,

$$\angle OAB + \angle OBA + \angle AOB = 180°$$

या $\quad \angle OAB + \angle OAB + 130° = 180°$

या $\quad 2\angle OAB + 130° = 180°$

या $\quad 2\angle OAB = 180° - 130°$

या $\quad 2\angle OAB = 50°$

या $\quad \angle OAB = \frac{50°}{2} = 25°$ उत्तर

7. एक वृत्त की दो स्पर्शियों के बीच का कोण 40° है। बताइए उनके स्पर्श बिन्दुओं से खींची गई त्रिज्याएँ केन्द्र पर कितने अंश का कोण बनाती हैं।

हल– हम जानते हैं कि—

वृत्त की स्पर्शियों के बीच का कोण + स्पर्श बिन्दुओं से खींची गई त्रिज्याओं के बीच का कोण $= 180°$

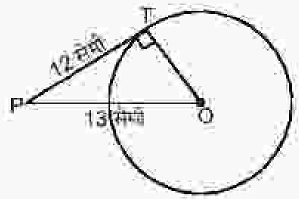
या स्पर्श बिन्दुओं से खींची गई त्रिज्याओं के बीच का कोण

$= 180°$ – वृत्त की स्पर्शियों के बीच का कोण

$= 180° - 40° = 140°$ उत्तर

8. वृत्त के केन्द्र O से 13 सेमी दूर स्थित बिन्दु P से वृत्त की स्पर्श रेखा की लम्बाई 12 सेमी है। वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—वृत्त के केन्द्र O से बिन्दु P की दूरी $OP = 13$ सेमी



तथा वृत्त की स्पर्श रेखा की लम्बाई $PT = 12$ सेमी

वृत्त की त्रिज्या $OT = ?$

समकोण ΔOTP में,

$$OP^2 = OT^2 + PT^2$$

या $$OT^2 = OP^2 - PT^2$$

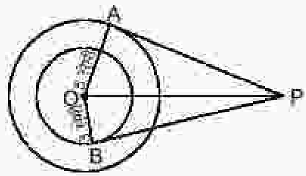
या $$OT = \sqrt{OP^2 - PT^2}$$

$$= \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{169 - 144}$$

$$= \sqrt{25} = 5 \text{ सेमी}$$

उत्तर

9. चित्र में दो संकेन्द्रीय वृत्त जिनका केन्द्र O है तथा जिनकी त्रिज्याएँ क्रमशः 5 सेमी तथा 3 सेमी मापी की हैं। बाह्य बिन्दु P से संगत वृत्तों पर खींची गई स्पर्शियाँ क्रमशः PA तथा PB हैं। यदि $PA = 12$ सेमी हो, तो PB की माप ज्ञात कीजिए।



हल– दिया है—संकेन्द्रीय वृत्तों की त्रिज्याएँ

$$OA = 5 \text{ सेमी} \quad \text{तथा} \quad OB = 3 \text{ सेमी}$$

तथा स्पर्श रेखा $$PA = 12 \text{ सेमी}$$

समकोण ΔOAP में,

$$OP^2 = OA^2 + PA^2$$

या $$OP^2 = \sqrt{OP^2 + PA^2}$$

$$= \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144}$$

$$= \sqrt{169} = 13 \text{ सेमी}$$

अब समकोण ΔOBP में,

$$OP^2 = OB^2 + PB^2$$

या $$PB^2 = OP^2 - OB^2$$

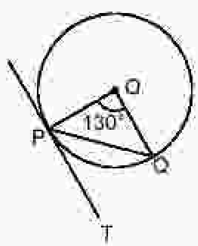
या $$PB^2 = \sqrt{13^2 - 3^2} = \sqrt{169 - 9}$$

$$= \sqrt{160} = \sqrt{16 \times 10}$$

$$= \mathbf{4\sqrt{10}} \textbf{ सेमी}$$

उत्तर

10. संलग्न चित्र में वृत्त का केन्द्र O है। PQ एक जीवा तथा PT स्पर्शी है। यदि $\angle POQ = 130°$ हो, तो $\angle QPT$ का मान ज्ञात कीजिए।



हल– दिए गए चित्रानुसार,

$$\angle POQ = 130°$$

ΔOPQ में,

$$OP = OQ \quad (\text{प्रत्येक वृत्त की त्रिज्या})$$

$\Rightarrow$ $$\angle OPQ = \angle OQP$$

(बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण)

परन्तु $\angle POQ + \angle OPQ + \angle OQP = 180°$

या $\angle POQ + \angle OPQ + OPQ = 180^\circ$

या $\angle POQ + 2\angle OPQ = 180^\circ$

या $130^\circ + 2\angle OPQ = 180^\circ$

या $2\angle OPQ = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$

या $\angle OPQ = \dfrac{50^\circ}{2} = 25^\circ$

$\because$ PT वृत्त की स्पर्शी है।

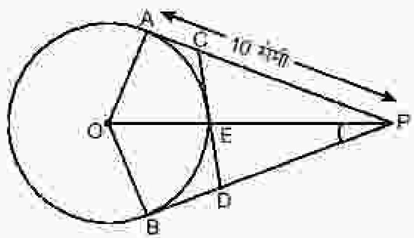
$\therefore$ $\angle OPT = 90^\circ$

या $\angle OPQ + \angle QPT = 90^\circ$

या $25^\circ + \angle QPT = 90^\circ$

या $\angle QPT = 90^\circ - 25^\circ = \mathbf{65^\circ}$ उत्तर

11. चित्र में एक बाह्य बिन्दु P से केन्द्र O वाले वृत्त पर स्पर्श रेखाएँ PA और PB खींची गई हैं, बिन्दु E पर स्पर्श रेखा CD है। यदि $AP = 10$ सेमी हो , तो ΔPCD का परिमाप ज्ञात कीजिए।



हल—प्रश्नानुसार, दिए गए चित्र में,

$AP = 10$ सेमी

हम जानते हैं कि— किसी बिन्दु से वृत्त की पर खींची गई दो स्पर्श रेखाएँ बराबर होती हैं।

अब $PA = PB = 10$

या $PC + CA = PD + DB = 10$ ...(1)

परन्तु $CA = CE$ ...(2) (प्रत्येक बिन्दु C से खींची गई स्पर्शी)

तथा $DE = DB$ ...(3) (प्रत्येक बिन्दु D से खींची गई स्पर्शी)

समीकरण (1), (2) व (3) से

$PC + CE = PD + DE = 10$ ...(4)

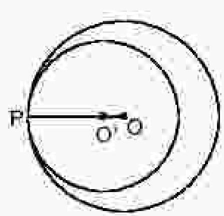
अब ΔPCD का परिमाप $= PC + CD + PD$

$= PC + CE + DE + PD$

$= (PC + CE) + (PD + DE)$

$= 10 + 10 = \mathbf{20}$ **सेमी** उत्तर

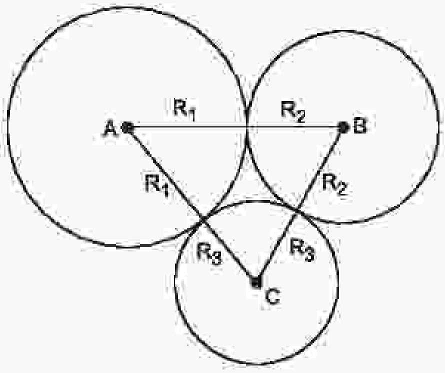
12. दिए गए चित्र में दो वृत्त एक-दूसरे को P बिन्दु पर अन्तः स्पर्श करते हैं। यदि दोनों वृत्तों के केन्द्रों के बीच की दूरी 0.8 सेमी तथा बड़े वृत्त की त्रिज्या 2.6 सेमी हो तो छोटे वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।



हल– प्रश्नानुसार, संकेन्द्रीय वृत्तों के केन्द्र क्रमशः O व O' है
जहाँ O बड़े वृत्त का केन्द्र तथा O' छोटे वृत्त का केन्द्र है।
तथा स्पर्श बिन्दु P है। अतः बड़े वृत्त की त्रिज्या OP तथा छोटे की त्रिज्या $O'P$ है।
दिया है— $OP = 2.6$ सेमी तथा $OP - O'P = 0.8$
या $O'P = OP - 0.8 = 2.6 - 0.8 = 1.8$ सेमी उत्तर

13. तीन वृत्त एक-दूसरे को बाह्य स्पर्श करते हैं। वृत्तों के केन्द्र क्रमशः A, B तथा C हैं। यदि $AB = 7$ सेमी, $BC = 5$ सेमी तथा $CA = 6$ सेमी है तो वृत्तों की त्रिज्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—तीन वृत्त जिनके केन्द्र क्रमशः A, B व C हैं, एक-दूसरे को बाह्य स्पर्श करते हैं।
माना वृत्तों की त्रिज्याएँ क्रमशः R_1, R_2, R_3 हैं।



वृत्तों के बीच दूरियाँ त्रिज्याओं के योग के बराबर होगी।

$\therefore \quad R_1 + R_2 = AB = 7$ सेमी ...(1)

$R_2 + R_3 = BC = 5$ सेमी ...(2)

$R_3 + R_1 = CA = 6$ सेमी ...(3)

समीकरण (1), (2) व (3) को जोड़ने पर,

$2(R_1 + R_2 + R_3) = 18$ सेमी

या $R_1 + R_2 + R_3 = 9$ सेमी ...(4)

समीकरण (4) में से समीकरण (1) घटाने पर,

$R_3 = 2$ सेमी

समीकरण (4) में से समीकरण (2) घटाने पर,

$R_1 = 4$ सेमी

तथा समीकरण (4) में से समीकरण (3) घटाने पर,

$R_2 = 3$ सेमी

अतः दिए गए वृत्तों की त्रिज्याएँ क्रमशः = **4 सेमी, 3 सेमी व 2 सेमी** उत्तर

14. तीन वृत्तों के केन्द्र क्रमशः A, B तथा C हैं। वृत्त एक-दूसरे को बाह्य स्पर्श करते हैं। यदि $AB = 14$ सेमी, $BC = 10$ सेमी तथा $CA = 12$ सेमी हैं, तो वृत्तों की त्रिज्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—तीन वृत्तों के केन्द्र क्रमशः A, B तथा C हैं।

$AB = 14$ सेमी, $BC = 10$ सेमी, $CA = 12$ सेमी

माना वृत्तों की त्रिज्याएँ क्रमशः R_1, R_2 व R_3 हैं।
चूँकि वृत्त एक-दूसरे को वाह्य स्पर्श करते हैं।
अतः वृत्तों के बीच की दूरियाँ उनकी त्रिज्याओं के योग के बराबर होंगी।

$\therefore$ $R_1 + R_2 = AB = 14$ सेमी ...(1)

$R_2 + R_3 = BC = 10$ सेमी ...(2)

$R_3 + R_1 = CA = 12$ सेमी ...(3)

जोड़ने पर, $2(R_1 + R_2 + R_3) = 36$

या $R_1 + R_2 + R_3 = 18$ ...(4)

समीकरण (4) में से समीकरण (1) घटाने पर,

$R_3 = 4$ सेमी

समीकरण (4) में से समीकरण (2) घटाने पर,

$R_1 = 8$ सेमी

तथा समीकरण (4) में से समीकरण (3) घटाने पर,

$R_2 = 6$ सेमी

अतः दिए गए वृत्त की त्रिज्याएँ क्रमशः = **8 सेमी, 6 सेमी तथा 4 सेमी** उत्तर

15. दो वृत्तों के केन्द्रों के बीच की दूरी 4.5 सेमी है। वृत्तों की त्रिज्याएँ 6.3 सेमी तथा 1.8 सेमी हैं। ज्ञात कीजिए कि क्या वृत्त एक-दूसरे को स्पर्श करते हैं? यदि हाँ तो स्पर्श वाह्य है अथवा अन्तः?

हल– दिया है—दो वृत्तों के केन्द्रों के बीच की दूरी $= 4.5$ सेमी $= OO'$ (माना)

तथा पहले वृत्त की त्रिज्या $(r_1) = 6.3$ सेमी

व दूसरे वृत्त की त्रिज्या $(r_2) = 1.8$ सेमी

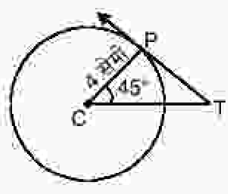
त्रिज्याओं का योगफल $= r_1 + r_2 = 6.3 + 1.8 = 8.1$ सेमी

तथा त्रिज्याओं का अन्तर $= r_1 - r_2 = 6.3 - 1.8 = 4.5$ सेमी

$\because$ वृत्तों के केन्द्रों के बीच की दूरी = त्रिज्याओं का अन्तर = 4.5 सेमी

अतः दोनों वृत्त एक-दूसरे को **अन्तः स्पर्श** करते हैं। उत्तर

16. दिए गए चित्र में वृत्त का केन्द्र C तथा वृत्त की त्रिज्या 4 सेमी है। यदि वृत्त के बिन्दु P पर स्पर्शी PT तथा $\angle PCT = 45°$ है, तो स्पर्शी PT की माप ज्ञात कीजिए।



हल– प्रश्नानुसार, वृत्त का केन्द्र C तथा वृत्त के बिन्दु P पर स्पर्शी PT है।

अतः $\angle CPT = 90°$ तथा

$\angle PCT = 45°$

$\therefore \Delta CPT$ में, $\angle PTC = 180° - (\angle CPT + \angle PCT)$

$= 180° - (90° + 45°)$

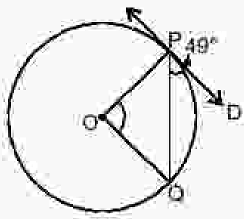
$= 180° - 135° = 45°$

ΔCPT में, $\angle PCT = \angle PTC$

$\therefore$ $PT = CP$ (बराबर कोणों की सम्मुख भुजाएँ)

या $PT = $ **4 सेमी** उत्तर

17. निम्नांकित चित्र में केन्द्र O वाले वृत्त के बिन्दु P पर स्पर्श रेखा PD है। यदि $\angle QPD = 49°$ है, तो $\angle POQ$ की माप ज्ञात कीजिए।



हल– प्रश्नानुसार, दिए गए चित्र में

$$\angle QPD = 49°$$

$\because$ PD वृत्त के बिन्दु P पर स्पर्शी है।

$\therefore$ $\angle OPD = 90°$

$\angle OPQ = \angle OPD - \angle QPD$

$= 90° - 49° = 41°$

ΔOPQ में, $OP = OQ$ (प्रत्येक वृत्त की त्रिज्या है)

$\therefore$ $\angle OQP = \angle OPQ = 41°$ (बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण)

ΔOPQ में,

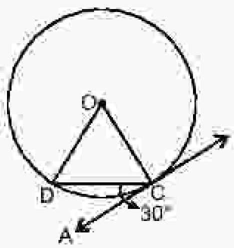
$\angle POQ + \angle OPQ + \angle OQP = 180°$

या $\angle POQ + 41° + 41° = 180°$

या $\angle POQ + 82° = 180°$

या $\angle POQ = 180° - 82° = \mathbf{98°}$ उत्तर

18. निम्नांकित चित्र में वृत्त का केन्द्र O तथा वृत्त के बिन्दु C पर स्पर्श रेखा AC है। यदि $\angle ACD = 30°$ है, तो $\angle DOC$ की माप ज्ञात कीजिए।



हल– प्रश्नानुसार, दिए गए चित्र में O वृत्त का केन्द्र तथा वृत्त के बिन्दु C पर स्पर्श रेखा AC है।

अतः $\angle OCA = 90°$

$\angle OCD = \angle OCA - \angle ACD$

$= 90° - 30° = 60°$

ΔOCD में, $OC = OD$ (प्रत्येक वृत्त की त्रिज्या)

$\therefore$ $\angle ODC = \angle OCD = 60°$

पुनः ΔOCD में, $\angle DOC = 180° - (\angle ODC + \angle OCD)$

$= 180° - (60° + 60°)$

$= 180° - 120° = \mathbf{60°}$ उत्तर

19. दो वृत्त एक-दूसरे को अंतः स्पर्श करते हैं। यदि वृत्तों के केन्द्रों के बीच की दूरी 3 सेमी और बड़े वृत्त की त्रिज्या 5 सेमी है तो छोटे वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—दो वृत्तों के केन्द्रों के बीच की दूरी = 3 सेमी

बड़े वृत्त की त्रिज्या $(r_1) = 5$ सेमी

माना छोटे वृत्त की त्रिज्या $= r_2$

$\because$ वृत्त एक-दूसरे को अन्तः स्पर्श करते हैं।

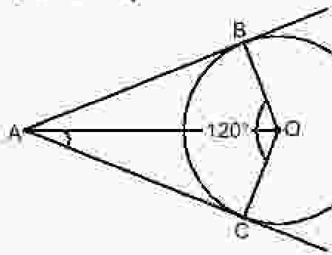
$\therefore$ त्रिज्याओं का अन्तर = केन्द्रों के बीच की दूरी

या $r_1 - r_2 = 3$ या $5 - r_2 = 3$

या $$5-3=r_2$$

या $$2=r_2 \Rightarrow r_2=2 \text{ सेमी}$$ उत्तर

20. निम्नांकित चित्र में केन्द्र का $\angle BOC = 120°$ और AB तथा AC वृत्त की स्पर्श रेखाएँ हैं। $\angle OAC$ की माप ज्ञात कीजिए।



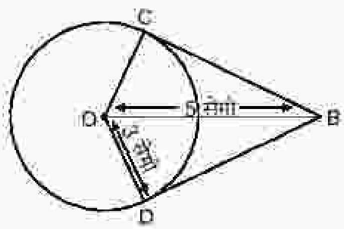
हल—चित्रानुसार, $$\angle AOC = \frac{1}{2}\angle BOC = \frac{1}{2}\times 120° = 60°$$

$\because$ AC वृत्त की स्पर्शी है।

$\therefore$ $$\angle OCA = 90°$$

ΔOAC में, $$\angle OAC = 180° - (\angle AOC + \angle OCA)$$
$$= 180° - (60° + 90°)$$
$$= 180° - 150° = \mathbf{30°}$$ उत्तर

21. दिए गए चित्र में, O केन्द्र के वृत्त की त्रिज्या $OD = 3$ सेमी है। यदि $OB = 5$ सेमी तो स्पर्श रेखा BC की माप ज्ञात कीजिए।



हल—चित्रानुसार, $OC = OD = 3$ सेमी

(प्रत्येक वृत्त की त्रिज्या)

$\because$ BC वृत्त की स्पर्शी है।

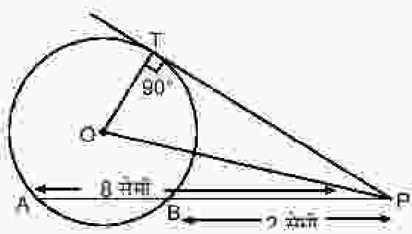
$\therefore$ $$\angle C = 90°$$

अतः समकोणीय ΔOBC में,
$$OB^2 = OC^2 + BC^2$$

या $$BC^2 = OB^2 - OC^2$$

या $$BC = \sqrt{OB^2 - OC^2} = \sqrt{5^2 - 3^2}$$
$$= \sqrt{25-9} = \sqrt{16} = \mathbf{4 \text{ सेमी}}$$ उत्तर

22. चित्र में, O वृत्त का केन्द्र है, PBA छेदक रेखा है तथा PT स्पर्श रेखा है। यदि $PB = 2$ सेमी एवं $PA = 8$ सेमी, तो PT की लम्बाई ज्ञात कीजिए।



हल—चित्रानुसार,

दिया है—$AP = 8$ सेमी, $BP = 2$ सेमी

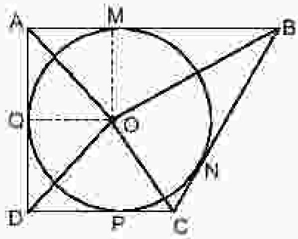
$\because$ $$PT^2 = AP \times BP$$

या $$PT^2 = 8 \times 2$$

या $\qquad PT^2 = 16$

या $\qquad PT = \sqrt{16} = 4$ सेमी **उत्तर**

23. वृत्त के परिगत एक चतुर्भुज खींचा गया है। सिद्ध कीजिए कि किन्हीं दो सम्मुख भुजाओं के केन्द्र पर अंतरित कोणों का योग दो समकोण होता है।



हल– ज्ञात है—एक वृत्त जिसका केन्द्र O तथा जिसके परिगत एक चतुर्भुज $ABCD$ है, जिसकी भुजाएँ AB, BC, CD तथा DA वृत्त को क्रमशः M, N, P तथा Q बिन्दुओं पर स्पर्श करती हैं।

सिद्ध करना है—$\angle AOB + \angle COD = 180°$

रचना—स्पर्श बिन्दु M और Q को केन्द्र O से मिलाया।

उपपत्ति—ΔOAM तथा ΔOAQ में,

$\angle OMA = \angle OQA$ (प्रत्येक समकोण)

$OM = OQ$ (प्रत्येक वृत्त की त्रिज्या)

$OA = OA$ (उभयनिष्ठ)

$\therefore \qquad \Delta OAM \cong \Delta OAQ$

अतः $\qquad \angle OAM = \angle OAQ \Rightarrow \angle OAB = \angle OAD$

इसी प्रकार, $\qquad \angle OBA = \angle OBC$

$\angle OCB = \angle OCD$ तथा $\angle ODC = \angle ODA$

ΔOAB में, $\qquad \angle AOB = 180° - \angle OAB - \angle OBA$ ...(1)

ΔOCD में, $\qquad \angle COD = 180° - \angle OCD - \angle ODC$ ...(2)

समीकरण (1) व (2) को जोड़ने पर,

$$\angle AOB + \angle COD = 180° - \angle OAB - \angle OBA + 180° - \angle OCD - \angle ODC$$

$$= 360° - (\angle OAB + \angle OBA + \angle OCD + \angle ODC)$$

$$= 360° - \left(\frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle C + \frac{1}{2}\angle D\right)$$

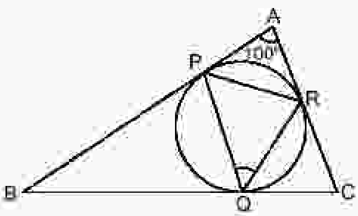
$$= 360° - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B + \angle C + \angle D)$$

परन्तु चतुर्भुज $ABCD$ में $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$

$$\therefore \qquad \angle AOB + \angle COD = 360° - \frac{1}{2} \times 360°$$

या $\qquad \angle AOB + \angle COD = 360° - 180° = \mathbf{180°}$ **इति सिद्धम्**

24. त्रिभुज ABC का अन्तःवृत्त त्रिभुज की भुजाओं AB, BC तथा CA को क्रमशः P, Q तथा R बिन्दुओं पर स्पर्श करता है। यदि $\angle BAC = 100°$ तो $\angle PQR$ का मान ज्ञात कीजिए।



हल– दिया है—ΔABC के अन्तःवृत्त जो भुजाओं AB, BC तथा CA को क्रमशः P, Q तथा R बिन्दुओं पर स्पर्श करता है तथा $\angle BAC = 100°$

चित्र से, $\qquad \angle PAR = \angle BAC = 100°$

$\because AP$ व AR स्पर्श रेखाखंड हैं।

$\therefore \quad AP = AR$

$\Rightarrow \quad \angle ARP = \angle APR \quad ...(1)$

ΔAPR में,

$$\angle PAR + \angle ARP + \angle APR = 180^\circ$$

या $\quad 100^\circ + \angle APR + \angle APR = 180^\circ$

या $\quad 100^\circ + 2\angle APR = 180^\circ$

या $\quad 2\angle APR = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$

या $\quad \angle APR = \dfrac{80^\circ}{2} = 40^\circ$

$\because$ AB स्पर्श रेखा है जो वृत्त को बिन्दु P पर स्पर्श करती है।

जीवा PR स्पर्श रेखा AB से बिन्दु P पर $\angle APR = 40^\circ$ बनाती है।

$\therefore$ एकान्तर वृत्तखंड का कोण $\angle PQR = 40^\circ$ उत्तर

25. दो वृत्तों की त्रिज्याएँ 4.5 सेमी तथा 3.2 सेमी हैं। दोनों वृत्त एक-दूसरे को बाह्य स्पर्श करते हैं। वृत्तों के केन्द्रों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल- दिया है—दो वृत्तों की त्रिज्याएँ $r_1 = 4.5$ सेमी तथा $r_2 = 3.2$ सेमी

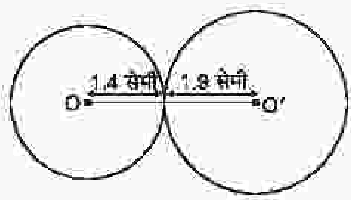
$\because$ वृत्त एक-दूसरे को बाह्य स्पर्श करते हैं।

अत: वृत्तों के केन्द्रों के बीच की दूरी = त्रिज्याओं का योगफल

$= r_1 + r_2 = 4.5 + 3.2 = 7.7$ सेमी उत्तर

26. केन्द्रों O तथा O' वाले वृत्तों की त्रिज्याएँ क्रमश: 1.4 सेमी तथा 1.9 सेमी हैं। यदि दोनों वृत्त एक-दूसरे को बाह्य स्पर्श करते हैं तो रेखाखंड OO' की माप ज्ञात कीजिए।

हल- दिया है—केन्द्र O वाले वृत्त की त्रिज्या $r_1 = 1.4$ सेमी

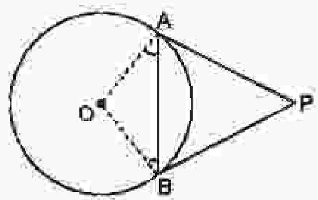


तथा केन्द्र O' वाले वृत्त की त्रिज्या $r_2 = 1.9$ सेमी

अत: रेखाखंड $OO' = r_1 + r_2$

$= 1.4 + 1.9 = 3.3$ सेमी उत्तर

27. सिद्ध कीजिए कि एक बाह्य बिन्दु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ संपर्क जीवा के साथ बराबर कोण अंतरित करती हैं।



हल- ज्ञात है—O केन्द्र वाले वृत्त की एक जीवा AB है। बाह्य बिन्दु P से जीवा के सिरों A व B पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ PA तथा PB हैं। जो जीवा के साथ क्रमश: $\angle PAB$ तथा $\angle PBA$ बनाती हैं।

सिद्ध करना है— $\angle PAB = \angle PBA$

रचना—OA तथा OB को मिलाया।

उपपत्ति—ΔOAB में,

$$OA = OB \quad \text{(वृत्त की त्रिज्याएँ)}$$

$\therefore$ $\angle OBA = \angle OAB$ (बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण) ...(1)

$\because$ PA तथा PB वृत्त को स्पर्श रेखाएं और OA व OB वृत्त की त्रिज्याएँ हैं।

$\therefore$ $\angle OAB = \angle OBP$ (प्रत्येक समकोण)

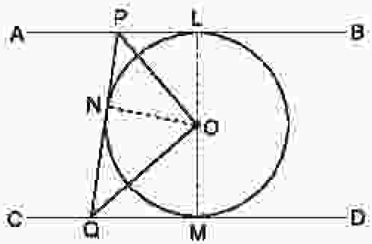
या $\angle OAB + \angle PAB = \angle OBA + \angle PBA$

या $\angle OAB + \angle PAB = \angle OAB + \angle PBA$ (समीकरण (1) से)

या $\angle PAB = \angle PBA$ **इति सिद्धम्**

28. सिद्ध कीजिए कि वृत्त की दो समांतर स्पर्श रेखाओं के बीच एक स्पर्श रेखा का अन्तःखंड केन्द्र पर समकोण अंतरित करता है।

हल– **ज्ञात है**— O केन्द्र वाले वृत्त की दो स्पर्श रेखाएँ AB और CD हैं जो परस्पर समान्तर हैं और वृत्त को L व M बिन्दुओं पर स्पर्श करती हैं। इन दो समान्तर रेखाओं के बीच वृत्त की तीसरी स्पर्श रेखा का अन्तःखंड PQ वृत्त को N बिन्दु पर स्पर्श करता है। अन्तःखंड PQ वृत्त के केन्द्र O पर $\angle POQ$ अंतरित करता है।



सिद्ध करना है—$\angle POQ = 90°$

रचना—त्रिज्याएं OL, OM तथा ON खींचा।

उपपत्ति— $\because$ AB और PQ वृत्त की स्पर्श रेखाएँ तथा OL तथा ON त्रिज्याएँ हैं।

$\therefore OL \perp AB$ तथा $ON \perp PQ$

समकोण ΔONP में तथा ΔOLP में,

$$ON = OL \quad \text{(वृत्त की त्रिज्याएँ)}$$

$$\angle ONP = \angle OLP \quad \text{(प्रत्येक समकोण)}$$

$$OP = OP \quad \text{(उभयनिष्ठ)}$$

$\therefore$ $\Delta ONP \cong \Delta OLP$

$\Rightarrow$ $\angle NPO = \angle LPO$ अर्थात् OP, $\angle LPN$ का अर्द्धक है

$\therefore$ $\angle NPO = \frac{1}{2}\angle LPN = \frac{1}{2}\angle BPQ$ ...(1)

इसी प्रकार, $\angle OQP = \frac{1}{2}\angle PQD$ ...(2)

समीकरण (1) व (2) को जोड़ने पर,

$$\angle NPQ + \angle OQP = \frac{1}{2}(\angle BPQ + \angle PQD) \quad ...(3)$$

$\because$ रेखा $AB \parallel CD$ और PQ तिर्यक रेखा है।

$\therefore$ तिर्यक रेखा PQ के एक ओर स्थित अन्तः कोणों का योग

$$\angle BPQ + \angle PQD = 180° \quad ...(4)$$

समीकरण (3) व (4) से,

$$\angle NPO + \angle OQP = \frac{1}{2} \times 180^\circ$$

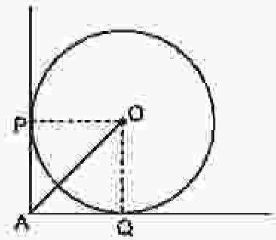
या $\angle NPO + \angle OQP = 90^\circ$

ΔOPQ में,

$$\angle POQ = 180^\circ - (\angle NPO + \angle OQP)$$

या $\angle POQ = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ इति सिद्धम्

29. किसी वृत्त की दो स्पर्श रेखाएँ एक-दूसरे को समकोण पर काटती हैं। सिद्ध कीजिए कि स्पर्श रेखाओं तथा इनके स्पर्श बिन्दुओं से जाने वाली त्रिज्याओं द्वारा बना चतुर्भुज एक वर्ग होगा।



हल– **ज्ञात है**—बाह्य बिन्दु A से केन्द्र O वाले वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ AP तथा AQ खींची, जो परस्पर लम्ब हैं। अर्थात् $\angle PAQ = 90^\circ$

सिद्ध करना है—चतुर्भुज $OPAQ$ एक वर्ग है।

रचना—त्रिज्याएँ OP तथा OQ खींचिए।

उपपत्ति—

$\because$ AP व AQ वृत्त की स्पर्श रेखाएँ तथा OP व OQ त्रिज्याएँ हैं।

$\therefore$ $\angle OPA = \angle OQA = 90^\circ$

केन्द्र O से A को मिलाने वाली रेखा $\angle PAQ$ का अर्द्धक है।

$\therefore$ $\angle OAP = \angle OAQ = \frac{1}{2} \angle PAQ = \frac{1}{2} \times 90^\circ = 45^\circ$

अब ΔOPA में,

$$\begin{aligned} \angle POA &= 180^\circ - (\angle OPA + \angle OAP) \\ &= 180^\circ - (90^\circ + 45^\circ) \\ &= 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ \end{aligned}$$

$\because$ $\angle OAP = \angle POA$

$\Rightarrow$ $OP = AP$ ...(1)

इसी प्रकार, ΔOQA में,

$$\begin{aligned} \angle QOA &= 180^\circ - (\angle OQA + \angle OAQ) \\ &= 180^\circ - (90^\circ + 45^\circ) \\ &= 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ \end{aligned}$$

$\therefore$ $\angle QOA = \angle OAQ$

$\Rightarrow$ $AQ = OQ$ ...(2)

$OP = OQ$ ...(3) (त्रिज्याएँ)

$AP = AQ$ ...(4)

(बाह्य बिन्दु से वृत्त की स्पर्शियाँ)

समीकरण (1), (2), (3) व (4) से

$$AP = AQ = OQ = OP$$

चतुर्भुज $APOQ$ में,

$$\angle A + \angle P + \angle O + \angle Q = 360^\circ$$

$$90^\circ + 90^\circ + \angle O + 90^\circ = 360^\circ$$

या $\angle O + 270^\circ = 360^\circ$

या $\angle O = 360^\circ - 270^\circ = 90^\circ$

∵ चतुर्भुज $APOQ$ में,

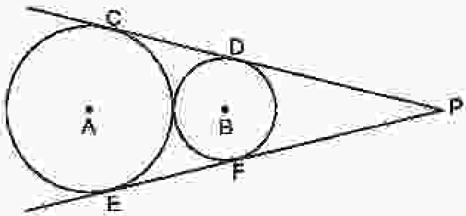
$$\angle A = \angle P = \angle O = \angle Q = 90^\circ$$

तथा $AP = OQ = OP = OQ$

अतः चतुर्भुज $APOQ$ एक वर्ग है। इति सिद्धम्

30. चित्र में दो वृत्तों की उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाएँ PDC और PEF हैं। सिद्ध कीजिए कि—

$$CD = EF$$



हल– दिए गए चित्र से स्पष्ट है।

$PD = PF$ ...(1)

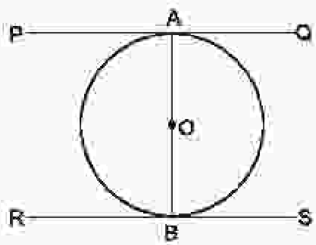
(बाह्य बिन्दु P से B केन्द्र वाले वृत्त की स्पर्शियाँ)

तथा $PC = PE$ (बाह्य बिन्दु P से A केन्द्र वाले वृत्त की स्पर्शियाँ)

या $PD + CD = PF + EF$

या $PD + CD = PD + EF$ या $CD = EF$ इति सिद्धम्

31. सिद्ध कीजिए कि किसी वृत्त के व्यास के अंतिम सिरों पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ समांतर होती हैं।



हल– ज्ञात है— O केन्द्र वाले वृत्त का व्यास AB है। व्यास के सिरों A तथा B से वृत्त पर स्पर्श रेखाएँ PAQ तथा RBS खींची गई हैं।

सिद्ध करना है— $PQ \parallel RS$

उपपत्ति— AB वृत्त का व्यास है और PAQ तथा RBS बिन्दुओं A व B पर स्पर्शियाँ हैं।

$$\angle PAB = 90^\circ$$

तथ $\angle ABS = 90^\circ$

$\angle PAB$ तथा $\angle ABS$ ऋजु रेखाओं PQ तथा RS को तिर्यक रेखा AB द्वारा काटने से बने समान एकान्तर कोण हैं।

अतः $PQ \parallel RS$ इति सिद्धम्

32. सिद्ध कीजिए कि किसी वृत्त की स्पर्श रेखा के स्पर्श बिन्दु पर डाला गया लम्ब वृत्त के केन्द्र से होकर गुजरता है।

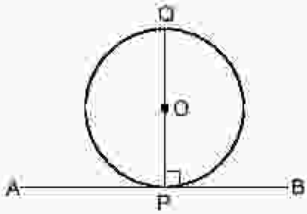
हल– ज्ञात है—O केन्द्र वाला एक वृत्त जिसकी स्पर्श रेखा AB के स्पर्श बिन्दु P से होकर AB पर लम्ब PQ खींचा गया है।

सिद्ध करना है—लम्ब PQ, वृत्त के केन्द्र O से होकर जाता है।

उपपत्ति—$\because$ $PQ \perp AB$ (दिया है)

$\therefore$ $\angle QPA = 90°$ ...(1)

$\because$ केन्द्र O वाले वृत्त की स्पर्श रेखा AB के स्पर्श बिन्दु P से होकर जाने वाली त्रिज्या OP, स्पर्श रेखा AB पर लम्ब होगी अर्थात्



$$OP \perp AB$$

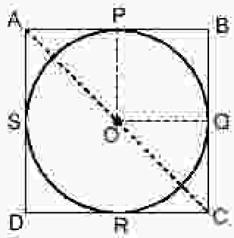
$\therefore$ $\angle OPA = 90°$ ...(2)

समीकरण (1) व (2) से प्रदर्शित होता है कि एक ही बिन्दु P पर बने $\angle QPA$ तथा $\angle OPA$ दोनों ही समकोण हैं, जो केवल तभी सम्भव है जब बिन्दु P, O एवं Q एक ही रेखा पर स्थित हों, जो स्पर्श रेखा AB के लम्बवत है।

अत: लम्ब PQ, वृत्त के केन्द्र O से होकर जाता है। **इति सिद्धम्**

33. सिद्ध कीजिए कि वृत्त के परिगत खींचा गया समांतर चतुर्भुज एक सम-चतुर्भुज होता है।

हल– ज्ञात है—O केन्द्र वाले वृत्त के परिगत खींचा गया समान्तर चतुर्भुज $ABCD$ जिसकी भुजाएँ वृत्त को क्रमश: P, Q, R तथा S बिन्दुओं पर स्पर्श करती हैं।



सिद्ध करना है—$ABCD$ एक समचतुर्भुज है।

रचना—AC, OP और OQ को मिलाया।

उपपत्ति—हम जानते हैं कि किसी बाह्य बिन्दु से वृत्त पर खींची गई दोनों स्पर्श रेखाएँ बराबर होती हैं।

$\therefore$ $AP = AS$, $BP = BQ$, $CQ = CR$ तथा $DR = DS$

अब ΔOAP तथा ΔOCQ में,

$OP = OQ$ (वृत्त की त्रिज्याएँ)

$\angle OAP = \angle OCQ$

(समान्तर चतुर्भुज के सम्मुख कोणों के अर्द्धक)

$\angle OPA = \angle OQC$ (प्रत्येक समकोण)

$\therefore$ $\Delta OAP \cong \Delta OCQ$

अत: $AP = CQ$

या $AP + BP = CQ + BP$

या $AP + BP = CQ + BQ$ $(\because BP = BQ)$

या $AB = BC$

इसी प्रकार सिद्ध किया जा सकता है कि—

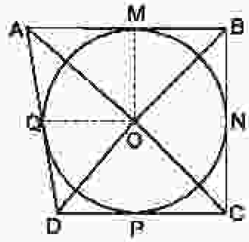
$AD = AB$ तथा $BC = CD$

$\therefore$ समान्तर चतुर्भुज $ABCD$ में,

$$AB = BC = CD = AD$$

अतः चतुर्भुज $ABCD$ एक समचतुर्भुज है। **इति सिद्धम्**

34. सिद्ध कीजिए कि किसी वृत्त के परिगत चतुर्भुज की विपरीत भुजाएँ वृत्त के केन्द्र पर सम्पूरक कोण अंतरित करती है।



हल– ज्ञात है—केन्द्र O वाले वृत्त के परिगत चतुर्भुज $ABCD$ खींचा गया है, जिसकी भुजाएँ AB, BC, CD व DA वृत्त को क्रमशः बिन्दुओं M, N, P तथा Q बिन्दुओं पर स्पर्श करती हैं।

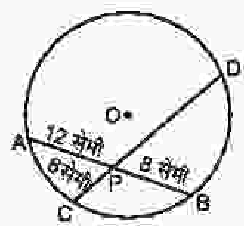
सिद्ध करना है— $\angle AOB + \angle COD = 180°$

रचना—स्पर्श बिन्दु M और Q को केन्द्र O से मिलाया।

उपपत्ति—प्रश्न संख्या 23 की भाँति स्वयं लिखिए।

अभ्यास 12.2

1. संलग्न चित्र में, वृत्त का केन्द्र O है। वृत्त की दो जीवाएँ AB तथा CD एक-दूसरे को वृत्त के अन्दर बिन्दु P पर काटती हैं। यदि $AP = 12$ सेमी, $PB = 8$ सेमी तथा $CP = 6$ सेमी है, तो रेखाखंड PD की माप ज्ञात कीजिए।



हल– दिया है—चित्रानुसार, $AP = 12$ सेमी, $PB = 8$ सेमी

तथा $CP = 6$ सेमी

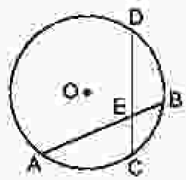
चूँकि वृत्त की जीवाएँ AB तथा CD एक-दूसरे को बिन्दु P पर काटती है। अतः

$$AP \times PB = CP \times PD \quad \text{या} \quad 12 \times 8 = 6 \times PD$$

या $$96 = 6PD$$

या $$PD = \frac{96}{6} = 16 \text{ सेमी}$$ **उत्तर**

2. दिए गए चित्र में वृत्त का केन्द्र O है। वृत्त की दो जीवाएँ AB तथा CD एक-दूसरे को बिन्दु E पर काटती हैं। यदि $DE = 4$ सेमी तथा $EC = 2.5$ सेमी है, तो रेखाखंडों AE तथा EB से निर्मित आयत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



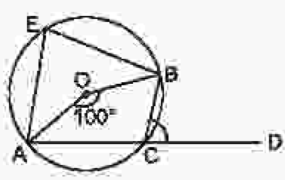
हल—रेखाखंड AE तथा EB द्वारा निर्मित आयत का क्षेत्रफल $= AE \times EB$

चूँकि जीवा AB तथा CD वृत्त की दो जीवाएँ हैं, जो एक-दूसरे को बिन्दु E पर काटती है।

अतः $$AE \times EB = DE \times EC$$

$$= 4 \times 2.5 = \mathbf{10.0 \text{ वर्ग सेमी}}$$ **उत्तर**

3. दिए गए चित्र में, O वृत्त का केन्द्र है। $\angle AOB = 100°$ है, तो $\angle BCD$ का मान ज्ञात कीजिए।



हल– दिए गए चित्र से स्पष्ट है कि $\angle AOB$ तथा $\angle AEB$ चाप ACB द्वारा क्रमशः केन्द्र तथा वृत्त पर अंतरित कोण है।

अतः $$\angle AEB = \frac{1}{2} \angle AOB$$

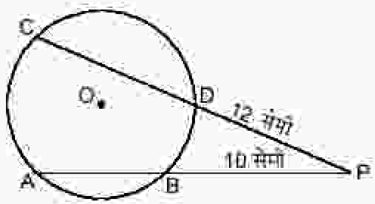
$$=\frac{1}{2}\times 100^\circ = 50^\circ$$

$\because$ बिन्दु A, E, B व C से होकर वृत्त खींचा गया है।

$\therefore ABCD$ एक चक्रीय चतुर्भुज है।

बहिष्कोण $\angle BCD = \angle AEB = \mathbf{50^\circ}$ **उत्तर**

4. दिए गए चित्र में केन्द्र O वाले वृत्त की दो जीवाएँ AB तथा CD एक-दूसरे को वृत्त के बाहर बिन्दु P पर काटती हैं। यदि $AP = 24$ सेमी, $BP = 10$ सेमी तथा $DP = 12$ सेमी है तो जीवा CD की लम्बाई ज्ञात कीजिए।



हल– चित्रानुसार, AB व CD वृत्त की दो जीवाएँ वृत्त के बाहर एक-दूसरे को बिन्दु P पर काटती है।

तथा दिया है—$AP = 24$ सेमी, $BP = 10$ सेमी, $DP = 12$ सेमी

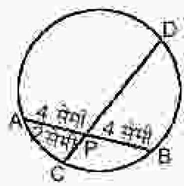
हम जानते हैं कि वृत्त के बाहर परस्पर प्रतिच्छेद करने वाली दो जीवाओं के खंडों से निर्मित आयत बराबर होते हैं।

अर्थात् $\quad AP \times BP = CP \times DP \quad$ या $\quad CP = \dfrac{AP \times BP}{DP}$

या $\quad CP = \dfrac{24 \times 10}{12} \quad$ या $\quad CP = 20$

$CD = CP - DP = 20 - 12 = \mathbf{8}$ **सेमी** **उत्तर**

5. संलग्न चित्र में, वृत्त की जीवाएँ AB तथा CD एक-दूसरे को बिन्दु P पर काटती हैं। यदि $AP = PB = 4$ सेमी तथा $CP = 2$ सेमी है, तो रेखाखंड PD की लम्बाई ज्ञात कीजिए।



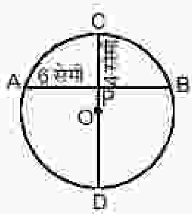
हल—दिए गए चित्र में, $\quad AP = PB = 4$ सेमी तथा $CP = 2$ सेमी

चूंकि जीवाएँ AB व CD एक-दूसरे को वृत्त के अन्दर बिन्दु P पर प्रतिच्छेदित करती है।

अतः $\quad AP \times PB = CP \times PD$

या $\quad PD = \dfrac{AP \times PB}{CP} = \dfrac{4 \times 4}{2} = \mathbf{8}$ **सेमी** **उत्तर**

6. संलग्न चित्र में, वृत्त का व्यास CD जीवा AB को समकोण पर बिन्दु P पर समद्विभाजित करता है। यदि $AP = 6$ सेमी तथा $CP = 4$ सेमी है, तो रेखाखंड PD की माप ज्ञात कीजिए।



हल—चूंकि व्यास CD जीवा AB को बिन्दु P पर समद्विभाजित करता है।

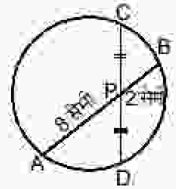
अतः $\quad AP = PB = 6$ सेमी

अब, जीवा AB तथा जीवा CD एक-दूसरे को बिन्दु P पर काटती है।

$\therefore \quad AP \times PB = CP \times PD$

या $\quad PD = \dfrac{AP \times PB}{CP} = \dfrac{6 \times 6}{4} = \mathbf{9}$ **सेमी** **उत्तर**

7. संलग्न चित्र में, वृत्त की दो जीवाएँ AB व CD एक-दूसरे को बिन्दु P पर काटती हैं। जीवा CD का मध्य-बिन्दु P है। यदि $AP = 8$ सेमी तथा $PB = 2$ सेमी है, तो जीवा CD की माप ज्ञात कीजिए।



हल– दिया है—जीवा CD का मध्य बिन्दु P है।

अतः $CP = PD$ तथा $AP = 8$ सेमी, $PB = 2$ सेमी

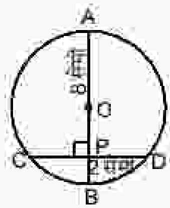
$\because$ जीवा AB व CD एक-दूसरे के बिन्दु P पर काटती है।

$\therefore$ $AP \times PB = CP \times PD$ या $8 \times 2 = CP \times CP$

या $16 = CP^2 \Rightarrow CP = \sqrt{16} = 4 = PD$

$CD = CP + PD = 4 + 4 = 8$ **सेमी** उत्तर

8. संलग्न चित्र में, $AP = 8$ सेमी, $BP = 2$ सेमी तथा $\angle CPA = 90°$ हैं। जीवा CD की माप ज्ञात कीजिए।



हल– हम जानते हैं कि वृत्त के केन्द्र से किसी जीवा पर डाला गया लम्ब जीवा को समद्विभाजित करता है।

यहाँ $OP \perp CD$

अतः $CP = PD = ?$

अब जीवा AB व जीवा CD परस्पर एक-दूसरे को बिन्दु P पर काटती हैं।

अतः $AP \times PB = CP \times PD$

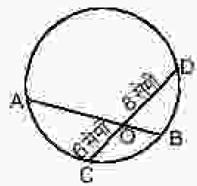
या $AP \times PB = CP \times CP$

या $CP^2 = AP \times PB$ या $CP^2 = 8 \times 2 = 16$

या $CP = \sqrt{16} = 4 = PD$

$CD = CP + PD = 4 + 4 = 8$ **सेमी** उत्तर

9. संलग्न चित्र में, वृत्त की दो जीवाएँ AB तथा CD एक-दूसरे को बिन्दु O पर काटती हैं। $AB = 16$ सेमी, $OC = 6$ सेमी तथा $OD = 8$ सेमी है। यदि $OB < OA$ है, तो रेखाखंड OB की लम्बाई ज्ञात कीजिए।



हल—प्रश्नानुसार, $AB = 16$ सेमी

या $AO + OB = 16$

$\Rightarrow$ $OA = (16 - OB)$ ...(1)

चूँकि जीवा AB व जीवा CD एक-दूसरे को बिन्दु O पर काटती हैं।

अतः $AO \times OB = CO \times OD$ या $AO \times OB = 6 \times 8$

या $AO \times OB = 48$ ...(2)

या $(16 - OB)OB = 48$ या $16OB - OB^2 = 48$

या $OB^2 - 16OB + 48 = 0$

या $OB^2 - 12OB - 4OB + 48 = 0$

या $OB(OB - 12) - 4(OB - 12) = 0$

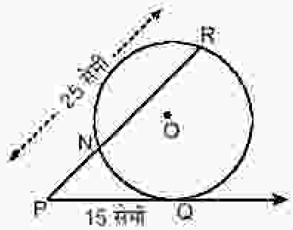
या $(OB - 12)(OB - 4) = 0$

अब, यदि $OB - 12 = 0$ तो $OB = 12$ तब $OA = 16 - 12 = 4$ सेमी

तथा यदि $OB - 4 = 0$ तो $OB = 4$ तब $OA = 16 - 4 = 12$ सेमी

चूँकि $OB < OA$ अतः $OB = 4$ **सेमी** **उत्तर**

10. संलग्न चित्र में, वृत्त की स्पर्शी PQ है। छेदक-रेखा PNR, वृत्त को बिन्दुओं N तथा R पर काटती है। $PQ = 15$ सेमी तथा $PR = 25$ सेमी है, तो रेखाखंड PN की लम्बाई ज्ञात कीजिए।



हल– प्रश्नानुसार, दिए गए चित्र में $PQ = 15$ सेमी, $PR = 25$ सेमी तथा PQ वृत्त की स्पर्श रेखा तथा PNR बाह्य बिन्दु P से वृत्त पर खींची गई छेदक-रेखा है।

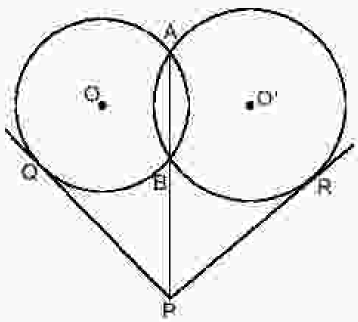
अतः $PN \times PR = PQ^2$ या $PN \times 25 = 15^2$

या $PN \times 25 = 225$ या $PN = \frac{225}{25} = 9$ **सेमी** **उत्तर**

11. दो वृत्त एक-दूसरे को बिन्दुओं A तथा B पर काटते हैं। वृत्तों की उभयनिष्ठ जीवा AB के बढ़ाए हुए भाग पर स्थित एक बिन्दु P से दोनों वृत्तों पर स्पर्श रेखाएँ PQ तथा PR खींची गई हैं, जो वृत्तों को बिन्दुओं Q तथा R पर स्पर्श करती हैं। सिद्ध कीजिए कि—

$$PQ = PR$$

हल– **ज्ञात है**—दो वृत्त जिनके केन्द्र O व O' हैं, एक-दूसरे को बिन्दुओं A व B पर काटते हैं। उभयनिष्ठ जीवा AB के बढ़ाए हुए भाग पर स्थित बिन्दु P से वृत्तों पर स्पर्श रेखाएँ PQ व PR खींची गई हैं।



सिद्ध करना है— $PQ = PR$

उपपत्ति— $\because$ केन्द्र O वाले वृत्त की स्पर्श रेखा PQ तथा छेदक-रेखा PBA है।

अतः $PB \times PA = PQ^2$ ...(1)

इसी प्रकार, केन्द्र O' वाले वृत्त की स्पर्श रेखा PR तथा छेदक-रेखा PBA है।

अतः $PB \times PA = PR^2$ ...(2)

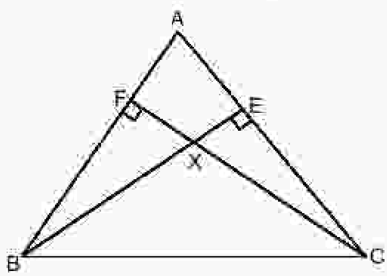
समीकरण (1) व (2) से

$PQ^2 = PR^2$ या $PQ = PR$ **इति सिद्धम्**

12. एक ΔABC के शीर्षों B तथा C के सम्मुख भुजाओं CA तथा AB पर डाले गए लम्ब क्रमशः BE तथा CF एक-दूसरे को बिन्दु X पर काटते हैं। सिद्ध कीजिए कि—

$$BX \,.\, XE = CX \,.\, XF$$

हल– **ज्ञात है**—ΔABC के शीर्षों B तथा C से सम्मुख भुजाओं पर डाले लम्ब क्रमशः BE तथा CF हैं, जो एक-दूसरे को बिन्दु X पर प्रतिच्छेद करते हैं।



सिद्ध करना है—

$BX \,.\, XE = CX \,.\, XF$

उपपत्ति— ΔBXF तथा ΔCXE में,

$$\angle BXF = \angle CXE \qquad \text{(शीर्षाभिमुख कोण)}$$

$$\angle XFB = \angle XEC \qquad \text{(प्रत्येक समकोण)}$$

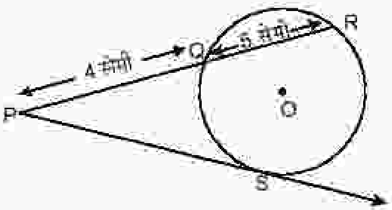
अतः $\angle FBX$ स्वतः ही $\angle XEC$ के बराबर होगा।

$\therefore \Delta BXF$ और ΔCXE समरूप त्रिभुज हैं।

$\Rightarrow \qquad \dfrac{BX}{XF} = \dfrac{CX}{XE}$ (समरूप त्रिभुजों की भुजाएँ समानुपात में होती हैं)

या $\qquad BX \cdot XE = CX \cdot XF$ **इति सिद्धम्**

13. दिए गए चित्र में, वृत्त की स्पर्श रेखा PS तथा छेदक रेखा PQR है। यदि $PQ = 4$ सेमी तथा $QR = 5$ सेमी है तो स्पर्श रेखा PS की माप ज्ञात कीजिए।



हल– प्रश्नानुसार, चित्र में

$$PQ = 4 \text{ सेमी},$$
$$QR = 5 \text{ सेमी}$$

अतः $\qquad PR = PQ + QR = 4 + 5 = 9$ सेमी

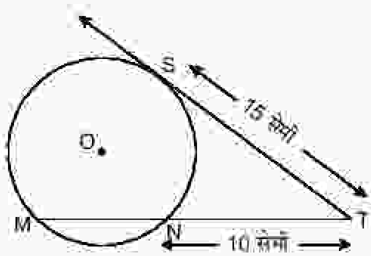
$\because$ वृत्त की स्पर्श रेखा PS तथा छेदक-रेखा PQR है।

$\therefore \qquad PQ \times PR = PS^2 \quad$ या $\quad PS^2 = PQ \times PR$

या $\qquad PS^2 = 4 \times 9 = 36$

या $\qquad PS = \sqrt{36} = $ **6 सेमी** **उत्तर**

14. दिए गए चित्र में, O केन्द्र वाला एक वृत्त है, जिसकी एक छेदक रेखा MNT तथा TS एक स्पर्श रेखा है। यदि $TS = 15$ सेमी तथा $TN = 10$ सेमी है तो जीवा MN की लम्बाई ज्ञात कीजिए।



हल– प्रश्नानुसार, दिए गए चित्र में,

$$TS = 15 \text{ सेमी}$$

तथा $\qquad TN = 10$ सेमी

चूँकि MNT वृत्त की छेदक-रेखा तथा TS स्पर्श रेखा है।

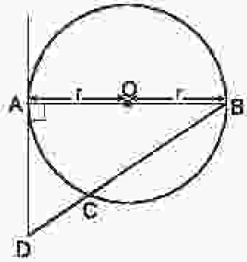
अतः $\qquad MT \times TN = TS^2$

या $\qquad MT = \dfrac{TS^2}{TN} = \dfrac{15^2}{10} = \dfrac{225}{10} = 22.5$ सेमी

$MN = MT - TN = 22.5 - 10 = $ **12.5 सेमी** **उत्तर**

15. एक वृत्त का व्यास AB है। बिन्दु A से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखा AD तथा बिन्दु B से खींची गई वृत्त की एक छेदक रेखा BD परस्पर बिन्दु D पर मिलती हैं। छेदक रेखा BD, वृत्त को बिन्दु C पर काटती है। यदि वृत्त की त्रिज्या r है, तो सिद्ध कीजिए कि—

$$BD \times BC = 4r^2$$



हल- ज्ञात है—केन्द्र O वाले वृत्त का व्यास AB है, जिसके बिन्दु A से खींची गई स्पर्श रेखा AD तथा बिन्दु B से खींची गई छेदक रेखा परस्पर बिन्दु D पर मिलती है। वृत्त की त्रिज्या $\left(\frac{AB}{2}\right) = r$ है।

सिद्ध करना है— $BD \times BC = 4r^2$

उपपत्ति—चूँकि AD वृत्त की स्पर्शी तथा BD छेदक रेखा है। अत:

$$AD^2 = DC \times BD \qquad ...(1)$$

चूँकि स्पर्श बिन्दु पर वृत्त का व्यास स्पर्श रेखा के लम्बवत् होता है।

अत: ΔABD समकोणीय है।

$\therefore$ समकोण ΔABD में, $BD^2 = AD^2 + AB^2$

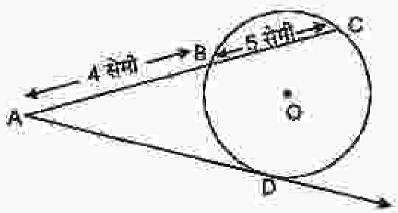
या $BD^2 = DC \times BD + (2r)^2$

या $BD^2 - DC \times BD = 4r^2$

या $BD(BD - DC) = 4r^2$

या $BD \times BC = 4r^2$ इति सिद्धम्

16. संलग्न चित्र में, वृत्त की स्पर्श रेखा AD तथा छेदक रेखा ABC है। यदि $AB = 4$ सेमी तथा $BC = 5$ सेमी है, तो स्पर्श रेखा AD की माप ज्ञात कीजिए।



हल- प्रश्नानुसार, दिए गए चित्र में, $AB = 4$ सेमी, $BC = 5$ सेमी

अत: $AC = AB + BC$

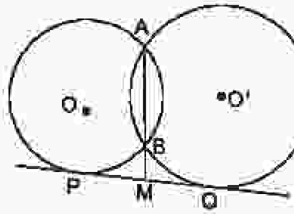
$= 4 + 5 = 9$ सेमी

$\because$ दिए गए वृत्त की स्पर्श रेखा AD तथा छेदक-रेखा AC है।

$\therefore$ $AD^2 = AB \times AC$ या $AD^2 = 4 \times 9$

या $AD^2 = 36 \Rightarrow AD = \sqrt{36} = 6$ सेमी उत्तर

17. दो वृत्त एक-दूसरे को दो बिन्दुओं पर काटते हैं। सिद्ध कीजिए कि इन वृत्तों की उभयनिष्ठ जीवा वाली रेखा वृत्तों के उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाखंड को समद्विभाजित करती है।



हल- ज्ञात है—केन्द्र O व O' वाले दो वृत्त जो परस्पर एक-दूसरे को बिन्दुओं A व B पर काटते हैं। उभयनिष्ठ जीवा AB वाली रेखा उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाखण्ड को बिन्दु M पर मिलती है।

सिद्ध करना है— $MP = MQ$

उपपत्ति— ∵ केन्द्र O वाले वृत्त की छेदक रेखा MA तथा स्पर्श रेखा MP है।

$$\therefore \quad MP^2 = MB \times MA \quad ...(1)$$

∵ केन्द्र O' वाले वृत्त की छेदक-रेखा MA तथा स्पर्श रेखा MQ है।

$$\therefore \quad MQ^2 = MB \times MA \quad ...(2)$$

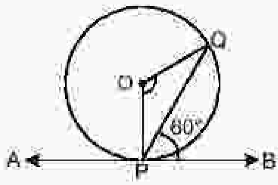
समीकरण (1) व (2) से,

$$MP^2 = MQ^2 \text{ या } MP = MQ$$

इति सिद्धम्

अभ्यास 12.3

1. चित्र में O वृत्त का केन्द्र है। वृत्त के बिन्दु P पर APB स्पर्श रेखा है। यदि $\angle QPB = 60°$ तो $\angle POQ$ की माप ज्ञात कीजिए।



हल– प्रश्नानुसार, दिए गए चित्र में, वृत्त के बिन्दु P पर स्पर्श रेखा APB है।

हम जानते हैं कि वृत्त की त्रिज्या स्पर्श बिन्दु पर लम्बवत होती है।

अतः
$$\angle OPB = 90°$$
$$\angle OPQ = \angle OPB - \angle QPB$$
$$= 90° - 60° = 30°$$

ΔOPQ में,

$$OP = OQ \quad \text{(वृत्त की त्रिज्याएँ हैं)}$$

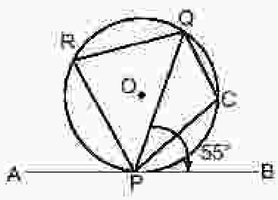
$$\therefore \quad \angle OQP = \angle OPQ \quad \text{या} \quad \angle OQP = 30°$$

पुनः ΔOPQ में,

$$\angle POQ = 180° - (\angle OPQ + \angle OQP)$$
$$= 180° - (30° + 30°)$$
$$= 180° - 60° = \mathbf{120°}$$

उत्तर

2. चित्र में, वृत्त की जीवा PQ तथा बिन्दु P पर वृत्त की स्पर्श रेखा APB है। यदि $\angle QPB = 55°$ है तो $\angle PRQ$ तथा $\angle PCQ$ की माप ज्ञात कीजिए।



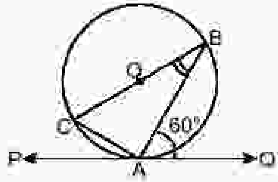
हल—चित्रानुसार,
$$\angle QPA + \angle QPB = 180°$$
$$\angle QPA + 55° = 180°$$
$$\angle QPA = 180° - 55° = 125°$$

$$\angle PRQ = \angle QPB = \mathbf{55°} \quad \text{(∵ एकान्तर वृत्तखंड में स्थित कोण)}$$

$$\angle PCQ = \angle QPA = \mathbf{125°} \quad \text{(∵ एकान्तर वृत्तखंड में स्थित कोण)}$$

उत्तर

3. चित्र में वृत्त का केन्द्र O है। वृत्त के बिन्दु A पर स्पर्श रेखा PAQ है। वृत्त का व्यास BOC है। यदि $\angle BAQ = 60^\circ$ तो $\angle ABC$ की माप ज्ञात कीजिए।



हल– प्रश्नानुसार, दिए गए चित्र में, $\angle BAQ = 60^\circ$

$\angle BCA = \angle BAQ = 60^\circ$ (∵ एकान्तर वृत्तखंड में स्थित कोण)

∵ $\angle BAC$ अर्द्धवृत्त में स्थित कोण है।

∴ $\angle BAC = 90^\circ$

अब, ΔABC मे,

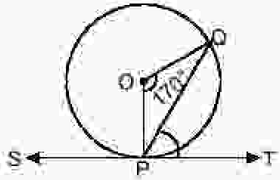
$\angle ABC + \angle BCA + \angle BAC = 180^\circ$

या $\angle ABC + 60^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

या $\angle ABC + 150^\circ = 180^\circ$

या $\angle ABC = 180^\circ - 150^\circ = \mathbf{30^\circ}$ **उत्तर**

4. चित्र में O वृत्त का केन्द्र है। स्पर्श रेखा SPT वृत्त को बिन्दु P पर स्पर्श करती है। वृत्त की जीवा PQ है। यदि $\angle POQ = 170^\circ$ तब $\angle QPT$ ज्ञात कीजिए।



हल– प्रश्नानुसार, दिए गए चित्र में, केन्द्र O वाले वृत्त की स्पर्श रेखा SPT वृत्त को बिन्दु P पर स्पर्श करती है।

अतः $OP \perp SPT$

∴ $\angle OPT = 90^\circ$

ΔOPQ में,

$OQ = OP$ (वृत्त की त्रिज्याएं हैं)

∴ $\angle OPQ = \angle OQP$ ...(1)

(बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण)

पुनः ΔOPQ में,

$\angle OPQ + \angle OQP + \angle POQ = 180^\circ$

या $\angle OPQ + \angle OPQ + \angle POQ = 180^\circ$ (समीकरण (1) से)

या $2\angle OPQ + \angle POQ = 180^\circ$

या $2\angle OPQ + 170^\circ = 180^\circ$

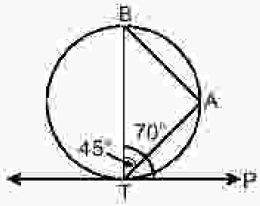
या $2\angle OPQ = 180^\circ - 170^\circ = 10^\circ$

या $\angle OPQ = 5^\circ$

परन्तु $\angle QPT = \angle OPT - \angle OPQ$

$= 90^\circ - 5^\circ = \mathbf{85^\circ}$ **उत्तर**

5. संलग्न चित्र में, PT एक वृत्त की स्पर्शी है। यदि $\angle BTA = 45^\circ$ तथा $\angle PTB = 70^\circ$ हो, तो $\angle ABT$ का मान ज्ञात कीजिए।



हल– प्रश्नानुसार, दिए गए चित्र में,

$\angle BTA = 45^\circ$

तथा $\angle PTB = 70^\circ$

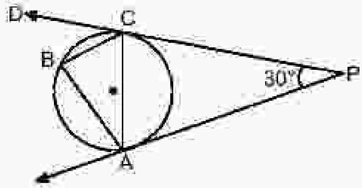
अतः $\angle PTA = \angle PTB - BTA$

$= 70^\circ - 45^\circ = 25^\circ$

$\angle ABT = \angle PTA = \mathbf{25^\circ}$ ($\because$ एकान्तर वृत्तखंड में स्थित कोण)

उत्तर

6. संलग्न चित्र में वृत्त के बाह्य बिन्दु P से वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ PA तथा PC खींची गई हैं जिनके बीच के $\angle APC$ की माप 30° है। बिन्दु C से स्पर्श रेखा PA के समान्तर वृत्त की जीवा CB खींची गई है। $\angle BAC$ की माप ज्ञात कीजिए।



हल– प्रश्नानुसार, दिए गए चित्र में, बिन्दु P से वृत्त पर खींची गई दो स्पर्श रेखाएँ PA व PC हैं।

अतः $PA = PC$

ΔAPC में,

$$PA = PC \Rightarrow \angle PCA = \angle PAC$$

पुनः ΔAPC में,

$\angle PCA + \angle PAC + \angle APC = 180^\circ$

या $\angle PAC + \angle PAC + \angle APC = 180^\circ$

या $2\angle PAC + \angle APC = 180^\circ$

या $2\angle PAC + 30^\circ = 180^\circ$

या $2\angle PAC = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$

या $\angle PAC = \dfrac{150^\circ}{2} = 75^\circ$

प्रश्नानुसार, $CB \parallel PA$ तथा CA इनकी तिर्यक रेखा है।

अतः $\angle BCA = \angle PAC$ (एकान्तर कोण)

या $\angle BCA = 75^\circ$

तथा $\angle ABC = \angle PAC$ ($\because$ एकान्तर वृत्तखंड के कोण हैं)

$= 75^\circ$

ΔABC में,

$\angle BAC + \angle ABC + \angle BCA = 180^\circ$

या $\angle BAC + 75^\circ + 75^\circ = 180^\circ$

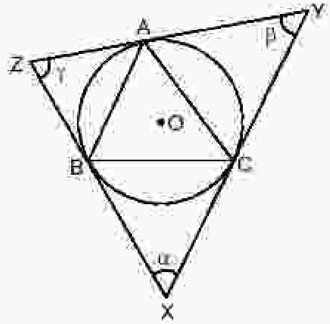
या $\angle BAC + 150^\circ = 180^\circ$

या $\angle BAC = 180^\circ - 150^\circ = \mathbf{30^\circ}$ उत्तर

7. एक वृत्त जिसका केन्द्र O है, पर बिन्दु A, B और C हैं। इन बिन्दुओं पर वृत्त की खींची गई स्पर्श रेखाओं से एक त्रिभुज XYZ बनता है। यदि ΔXYZ के $\angle X = \alpha, \angle Y = \beta$ तथा $\angle Z = \gamma$ तब ΔABC के कोण ज्ञात कीजिए।

हल– प्रश्नानुसार, केन्द्र O वाले वृत्त पर बिन्दु A, B तथा C स्थित हैं। इन बिन्दुओं से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ एक ΔXYZ बनाती हैं।

ΔXYZ के कोण α, β व γ हैं, जैसा कि चित्र में प्रदर्शित है।



$\because$ बिन्दु Y से वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ YB तथा YC हैं।

$\therefore$ $YB = YC$

ΔBXC में, $XB = XC$

$\Rightarrow$ $\angle XCB = \angle XBC$ ...(1)

पुनः ΔBXC में,

$$\angle XBC + \angle XCB + \angle BXC = 180^\circ$$

या $\angle XBC + \angle XBC + \angle BXC = 180^\circ$ (समीकरण (1) से)

या $2\angle XBC = 180^\circ - \alpha$

या $\angle XBC = \dfrac{180^\circ - \alpha}{2}$

या $\angle XBC = \dfrac{180^\circ}{2} - \dfrac{\alpha}{2}$

या $\angle XBC = 90^\circ - \dfrac{\alpha}{2}$

$$\angle BAC = \angle XBC = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

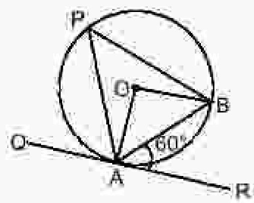
($\because$ एकान्तर वृत्तखंड में स्थित कोण हैं)

इसी प्रकार, ज्ञात किया जा सकता है कि

$$\angle ABC = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$$

$$\angle BCA = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$$

अतः ΔABC के कोण क्रमशः $\left(90^\circ - \dfrac{\alpha}{2}\right), \left(90^\circ - \dfrac{\beta}{2}\right)$ तथा $\left(90^\circ - \dfrac{\gamma}{2}\right)$ हैं। **उत्तर**



8. चित्र में O वृत्त का केन्द्र है। रेखा QAR वृत्त की बिन्दु A पर स्पर्श रेखा और AB जीवा है। यदि $\angle BAR = 60^\circ$ तो $\angle AOB$ तथा $\angle OBA$ के मान ज्ञात कीजिए।

हल—प्रश्नानुसार, दिए गए चित्र में,

$$\angle BAR = 60^\circ$$

$$\angle APB = \angle BAR = 60^\circ$$

($\because$ एकान्तर वृत्तखंड में स्थित कोण हैं)

$\because$ $\angle AOB$ तथा $\angle APB$ जीवा AB द्वारा क्रमशः केन्द्र और वृत्त पर अंतरित कोण हैं।

$\therefore$ $\angle AOB = 2\angle APB = 2\times 60^\circ = 120^\circ$

ΔOAB में, $OA = OB$ (वृत्त की त्रिज्याएँ हैं)

$\Rightarrow$ $\angle OBA = \angle OAB$ ...(1)

(बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण हैं)

पुनः ΔOAB में,

$$\angle OBA + \angle OAB + \angle AOB = 180^\circ \qquad \text{(समीकरण (1) से)}$$

या $\quad \angle OBA + \angle OBA + \angle AOB = 180^\circ$

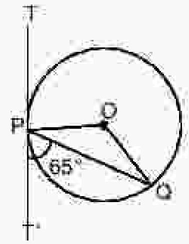
या $\quad 2\angle OBA + 120^\circ = 180^\circ$

या $\quad 2\angle OBA = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

या $\quad \angle OBA = 30^\circ$

अतः $\angle ABO = 120^\circ$ तथा $\angle OBA = 30^\circ$ **उत्तर**

9. दिए गए चित्र में TPT' वृत्त की स्पर्श रेखा है। $\angle QPT' = 65^\circ$ हो, तो $\angle POQ$ का मान ज्ञात कीजिए।



हल—प्रश्नानुसार, दिए गए चित्र में,

$\angle QPT' = 65^\circ$, OP वृत्तकी त्रिज्या तथा TPT' स्पर्श रेखा है।

चूँकि वृत्त की स्पर्श रेखा स्पर्श बिन्दु से होकर जाने वाली त्रिज्या पर लम्ब होती है।

$\therefore \quad \angle OPT' = 90^\circ$

$\angle OPQ = \angle OPT' - \angle QPT'$

$= 90^\circ - 65^\circ = 25^\circ$

ΔOPQ में, $\quad OP = OQ \qquad$ (वृत्त की त्रिज्याएं हैं)

$\Rightarrow \quad \angle OQP = \angle OPQ$

$= 25^\circ$

पुनः ΔOPQ में,

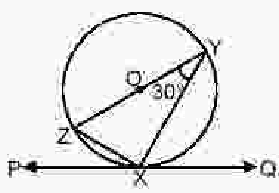
$$\angle POQ + \angle OQP + \angle OPQ = 180^\circ$$

या $\quad \angle POQ + 25^\circ + 25^\circ = 180^\circ$

या $\quad \angle POQ + 50^\circ = 180^\circ$

या $\quad \angle POQ = 180^\circ - 50^\circ = \mathbf{130^\circ}$ **उत्तर**

10. संलग्न चित्र में O वृत्त का केन्द्र है। PXQ वृत्त की स्पर्श रेखा है। YOZ वृत्त का व्यास है। यदि $\angle XYZ = 30^\circ$ हो, तो $\angle YXQ$ की माप ज्ञात कीजिए।



हल—प्रश्नानुसार, दिए गए चित्र में, YOZ वृत्त का व्यास है।

अतः $\angle YXZ$ अर्द्धवृत्त में निर्मित कोण है।

$\therefore \quad \angle YXZ = 90^\circ$

ΔXYZ में,

$$\angle YZX + \angle YXZ + \angle XYZ = 180^\circ$$

या $\quad \angle YZX + 90^\circ + 30^\circ = 180^\circ$

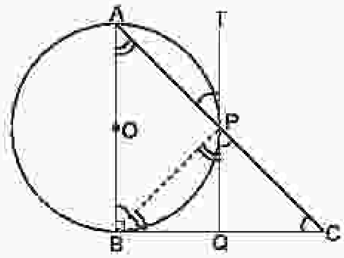
या $\quad \angle YZX + 120^\circ = 180^\circ$

या $\quad \angle YZX = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

$\because \angle YXQ$ तथा $\angle YZX$ एकान्तर वृत्तखंड में स्थित कोण है।

$\therefore \quad \angle YXQ = \angle YZX = \mathbf{60^\circ}$ **उत्तर**

11. एक समकोण त्रिभुज ABC में भुजा AB को व्यास मानकर एक वृत्त खींचा गया है, जो कर्ण AC को P पर प्रतिच्छेद करता है। सिद्ध कीजिए कि बिन्दु P पर वृत्त की स्पर्श रेखा भुजा BC को समद्विभाजित करती है।



हल- ज्ञात है—समकोण ΔABC जिसमें $\angle B = 90°$ है। भुजा AB को व्यास मानकर खींचा गया वृत्त कर्ण AC को बिन्दु P पर प्रतिच्छेद करता है। बिन्दु P पर खींची गई स्पर्श TPQ भुजा BC को बिन्दु Q पर मिलती है।

सिद्ध करना है—Q, भुजा BC का मध्य-बिन्दु है।

अर्थात् $\quad BQ = QC$

रचना—बिन्दु B व P को मिलाया।

उपपत्ति— $\quad \angle APB = 90°$ (अर्द्धवृत्त में स्थित कोण)

तथा $\quad \angle APT = \angle ABP$ (एकान्तर वृत्तखंड के कोण)

परन्तु $\quad \angle APT = \angle CPQ$ (शीर्षाभिमुख कोण)

$\therefore \quad \angle APT = \angle ABP = \angle CPQ \quad$ ...(1)

बिन्दु Q से वृत्त की दो स्पर्शियाँ QP व QB हैं।

अतः $\quad QB = QP \quad$ ...(2)

ΔABP तथा ΔBPC में,

$\angle BAP = \angle PBC$ (एकान्तर वृत्तखंड के कोण)

$\angle APB = \angle BPC = 90°$ (प्रत्येक समकोण)

अतः शेष $\angle ABP =$ शेष $\angle BCP$

या $\quad \angle ABP = \angle QCP \quad$ ...(3)

समीकरण (1) व (3) से

$$\angle CPQ = \angle QCP$$

$\Rightarrow \quad QC = QP \quad$ ...(4)

(बराबर कोणों की सम्मुख भुजाएँ)

समीकरण (2) व (4) से

$$QB = QC$$

या $\quad BQ = QC \quad$ इति सिद्धम्

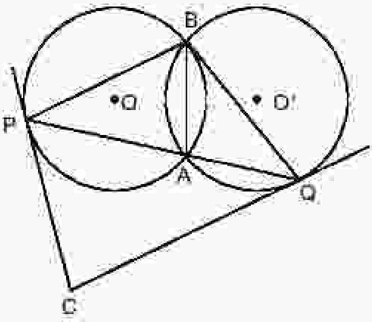
12. दो वृत्त एक-दूसरे को बिन्दुओं A तथा B पर काटते हैं। एक वृत्त के बिन्दु P से खींची गई सरल रेखा PAQ दूसरे वृत्त के बिन्दु Q पर मिलती है, यदि बिन्दुओं P तथा Q पर खींची गई वृत्तों की स्पर्श रेखाएँ एक-दूसरे को बिन्दु C पर काटती हैं तो सिद्ध कीजिए P, B, Q और C एकवृत्तीय हैं।

हल- ज्ञात है—दो वृत्त जिनके केन्द्र O तथा O' हैं, एक-दूसरे को बिन्दुओं A तथा B पर काटते हैं। एक वृत्त पर स्थित किसी बिन्दु P से एक छेदक रेखा PAQ खींची गई जो दूसरे वृत्त को बिन्दु Q पर मिलती है। बिन्दुओं P तथा Q से वृत्तों पर क्रमशः PC तथा QC स्पर्श रेखाएं खींची गई जो परस्पर बिन्दु C पर मिलती है।

सिद्ध करना है—बिन्दु P, B, Q और C एकवृत्तीय

अर्थात् चतुर्भुज $PBQC$ एक चक्रीय चतुर्भुज है।

उपपत्ति—केन्द्र O वाले वृत्त की स्पर्श रेखा PC तथा जीवा PA है।



$\therefore \quad \angle APC = \angle PBA$ (एकान्तर वृत्तखंड में स्थित कोण)

या $\quad \angle QPC = \angle PBA$ ...(1)

केन्द्र O' वाले वृत्त की स्पर्श रेखा QC तथा जीवा QA है।

$\therefore \quad \angle AQC = \angle QBA$ (एकान्तर वृत्तखंड में स्थित कोण)

या $\quad PQC = \angle QBA$ ...(2)

समीकरण (1) व (2) को जोड़ने पर,

$$\angle QPC + \angle PQC = \angle PBA + \angle QBA$$

या $\quad \angle QPC + \angle PQC = \angle PBQ$ ...(3)

परन्तु ΔPCQ में,

$$\angle QPC + \angle PQC + \angle C = 180^\circ$$

या $\quad \angle QPC + \angle PQC = 180^\circ - \angle C$ ...(4)

समीकरण (3) व (4) से,

$$\angle PBQ = 180^\circ - \angle C \quad \text{या} \quad \angle PBQ + \angle C = 180^\circ$$

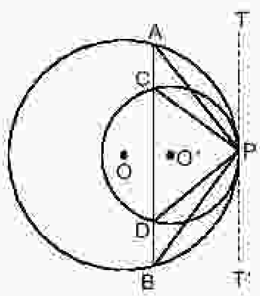
अर्थात् $\angle PBQ$ व $\angle C$ एक-दूसरे के सम्पूरक हैं।

$\therefore$ चतुर्भुज $PBQC$ चक्रीय है।

अतः बिन्दु P, B, Q और C वृत्तीय हैं। **इति सिद्धम्**

13. दो वृत्त एक-दूसरे को बिन्दु P पर अन्तः स्पर्श करते हैं। बाह्य वृत्त की एक जीवा AB अन्तः वृत्त को बिन्दुओं C तथा D पर काटती है। सिद्ध कीजिए कि रेखाखंड AC तथा रेखाखंड DB बिन्दु P पर बराबर कोण अंतरित करते हैं।

हल– ज्ञात है—दो वृत्त जिनके केन्द्र O तथा O' हैं, एक-दूसरे को बिन्दु P पर अन्तःस्पर्श करते हैं। बाह्य वृत्त की जीवा AB अन्तः वृत्त को बिन्दु C व D पर काटती है।



सिद्ध करना है— $\angle APC = \angle BPD$

रचना—बिन्दु P से वृत्तों की एक स्पर्श रेखा TPT' खींचिए।

उपपत्ति—छोटे वृत्त की जीवा CP तथा स्पर्श रेखा TPT' के बीच का कोण

$$\angle TPC = \angle CDP \quad ...(1)$$

(एकान्तर वृत्तखंड के कोण)

बड़े वृत्त की जीवा AP तथा स्पर्श रेखा TPT' के बीच का कोण

$\angle TPA = ABP$ ...(2) (एकान्तर वृत्तखंड का कोण)

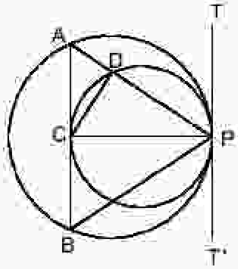
समीकरण (1) में से समीकरण (2) घटाने पर,

$\angle TPC - \angle TPA = \angle CDP - \angle ABP$

या $\angle APC = \angle BPD$ [$\because$ बहिष्कोण $CDP = \angle ABP + \angle BDP$]

इति सिद्धम्

14. दो वृत्त एक-दूसरे को किसी बिन्दु P पर अन्त: स्पर्श करते हैं। बड़े वृत्त की कोई जीवा AB खींची जाती है, जो छोटे वृत्त को बिन्दु C पर स्पर्श करती है। सिद्ध कीजिए कि रेखाखंड CP, $\angle APB$ का अर्द्धक है।



हल– ज्ञात है—दो वृत्त जो एक-दूसरे को बिन्दु P पर अन्त: स्पर्श करते हैं। बड़े वृत्त की जीवा AB, छोटे वृत्त को बिन्दु C पर स्पर्श करती है।

सिद्ध करना है—रेखाखंड CP, $\angle APB$ का अर्द्धक है।

अर्थात् $\angle APC = \angle BPC$

रचना—छोटे वृत्त की जीवा CD खींचो तथा स्पर्श बिन्दु P पर एक उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा TPT' खींचो।

उपपत्ति—$\because$ बिन्दु P पर छोटे वृत्त की जीवा PD तथा स्पर्श रेखा PT है।

$\therefore$ $\angle TPD = \angle PCD$ ...(1) (एकान्तर वृत्तखंड का कोण)

$\because$ बिन्दु P पर बड़े वृत्त की जीवा PA तथा स्पर्श रेखा PT है,

$\therefore$ $\angle TPA = \angle ABP$ (एकान्तर वृत्तखंड का कोण)

या $\angle TPD = \angle CBP$

या $\angle PCD = \angle CBP$ ...(2) (समीकरण (1) से)

$\because$ बिन्दु C पर छोटे वृत्त की जीवा CP तथा स्पर्श रेखा BC है।

$\therefore$ $\angle BCP = \angle CDP$ ...(3)

अब, ΔPDC और PBC में,

$\angle PCD = \angle CBP$ (सिद्ध किया गया है)

$\angle CDP = \angle BCP$ (सिद्ध किया गया है)

शेष $\angle DPC =$ शेष $\angle BPC$

या $\angle APC = \angle BPC$

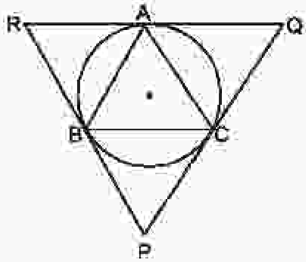
अर्थात् **रेखाखंड CP, $\angle APB$ का अर्द्धक है।** इति सिद्धम्

15. एक वृत्त पर तीन बिन्दु A, B व C स्थित हैं। इन बिन्दुओं पर वृत्त की स्पर्श रेखाएँ क्रमश: QR, RP तथा PQ खींची गई हैं। सिद्ध कीजिए—

$$\angle CAB = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle QPR$$

हल– ज्ञात है—एक वृत्त जिस पर तीन बिन्दु A, B व C स्थित हैं। इन बिन्दुओं पर स्पर्श रेखाएँ QR, RP तथा PQ खींची गई हैं।

सिद्ध करना है— $\angle CAB = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle QPR$



उपपत्ति— $\because$ स्पर्श रेखाएँ PQ व PR वृत्त के बिन्दुओं C व B पर स्पर्श करती हैं।

$\therefore \quad PC = PB$

$\Rightarrow \quad \angle PBC = \angle PCB \quad ...(1)$

परन्तु ΔPBC में,

$\angle BPC + \angle PBC + \angle PCB = 180°$

या $\quad \angle BPC + \angle PCB + \angle PCB = 180°$

(समीकरण (1) से)

या $\quad \angle BPC + 2\angle PCB = 180°$

या $\quad 2\angle PCB = 180° - \angle BPC$

या $\quad \angle PCB = 90° - \dfrac{\angle BPC}{2} \quad ...(2)$

$\because PQ$ स्पर्श रेखा है और स्पर्श बिन्दु C से जीवा BC है।

$\therefore \angle PCB =$ एकान्तर वृत्तखंड में बना कोण $= \angle CAB$

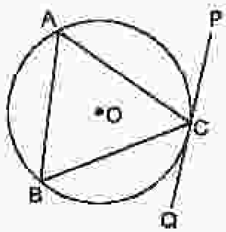
या $\quad \angle CAB = \angle PCB$

या $\quad \angle CAB = 90° - \dfrac{\angle BPC}{2}$

या $\quad \angle CAB = 90° - \dfrac{\angle QPR}{2} \quad (\because \angle BPC = \angle QPR)$

इति सिद्धम्

16. किसी वृत्त की एक जीवा AB, वृत्त के बिन्दु C पर खींची गई स्पर्श रेखा PCQ के समान्तर है। सिद्ध कीजिए कि बिन्दु C, चाप ACB को समद्विभाजित करता है।



हल— **ज्ञात है**—केन्द्र O वाला एक वृत्त है जिसकी एक जीवा AB, वृत्त के बिन्दु C पर खींची गई स्पर्श रेखा PCQ के समान्तर है।

सिद्ध करना है—बिन्दु C, चाप ACB को समद्विभाजित करता है।

अर्थात् $\quad$ चाप $BC =$ चाप AC

रचना—जीवाएँ AC तथा BC खींची।

उपपत्ति— $\because AB \parallel PQ$ तथा AC तिर्यक रेखा है।

$\therefore \quad \angle BAC = \angle PCA \quad ...(1) \quad$ (एकान्तर कोण)

वृत्त के बिन्दु C पर स्पर्श रेखा PQ तथा जीवा AC है।

अत: $\quad \angle PCA = \angle ABC \quad ...(2) \quad$ (एकान्तर वृत्त खण्ड के कोण)

समीकरण (1) व (2) से,

$\angle BAC = \angle ABC$

अब, ΔABC में, $\quad \angle BAC = \angle ABC \quad$ (सिद्ध किया गया है)

$\Rightarrow \quad BC = AC$

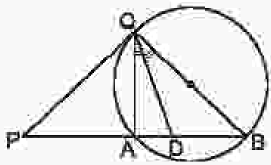
$\because$ किसी वृत्त में समान जीवाएँ समान चाप अंतरित करती हैं।

$\therefore \quad$ चाप $BC =$ चाप AC

अत: **बिन्दु C** चाप **ACB** का **मध्य बिन्दु** है। अर्थात् **बिन्दु C, चाप ACB को समद्विभाजित करता है।**

इति सिद्धम्

17. दिए गए चित्र में, *PAB* वृत्त की एक छेदक रेखा है तथा *PQ* स्पर्श रेखा है। यदि $\angle AQB$ का अर्द्धक, *AB* को *D* पर काटे तो सिद्ध कीजिए— $PQ = PD$



हल– प्रश्नानुसार, दिए गए चित्र में, वृत्त की स्पर्शी *PQ* तथा *QA* एक जीवा है।

$\therefore \qquad \angle PQA = \angle QBD \qquad ...(1)$

$\because$ *QD*, $\angle AQB$ का अर्द्धक है।

$\therefore \qquad \angle AQD = \angle BQD \qquad ...(2)$

समीकरण (1) व (2) को जोड़ने पर,

$$\angle PQA + \angle AQD = \angle QBD + \angle BQD$$

या $\qquad \angle PQD = \angle QBD + \angle BQD \qquad ...(3)$

$\because \Delta BQD$ का बहिष्कोण $\angle QDP$ है।

$\therefore \qquad \angle QDP = \angle QBD + \angle BQD \qquad ...(4)$

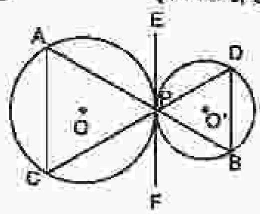
समीकरण (3) व (4) से,

$$\angle PQD = \angle QDP$$

ΔPQD में, $\qquad \angle PQD = \angle QDP$

$\Rightarrow \qquad PD = PQ \Rightarrow PQ = PD$ $\qquad$ इति सिद्धम्

18. दिए गए चित्र में, दो वृत्त एक-दूसरे को बिन्दु *P* पर बाह्यतः स्पर्श करते हैं। बिन्दु *P* से दो छेदक रेखाएँ *APB* और *CPD* खींची जाती हैं, जो वृत्तों को *A, B, C* तथा *D* पर काटती हैं। सिद्ध कीजिए— $AC \parallel BD$



हल—दिए गए चित्र में,

$\angle APE = \angle BPF \qquad ...(1) \qquad$ (सम्मुख कोण)

$\because$ केन्द्र *O* वाले वृत्त की स्पर्शी *EP* तथा एक जीवा *AP* है।

$\therefore \qquad \angle APE = \angle ACP \qquad$ (एकान्तर वृत्तखंड के कोण)

या $\qquad \angle APE = \angle ACD \qquad ...(2)$

समीकरण (1) व (2) से,

$$\angle BPF = \angle ACD \qquad ...(3)$$

$\because$ केन्द्र *O'* वाले वृत्त की स्पर्शी *FP* तथा एक जीवा *BP* है।

$\therefore \qquad \angle BPF = \angle BDP$

या $\qquad \angle BPF = \angle BDC \qquad ...(4)$

समीकरण (3) व (4) से,

$$\angle ACD = \angle BDC$$

$\Rightarrow \qquad AC \parallel BD$ $\qquad$ इति सिद्धम्

बहुविकल्पीय प्रश्न

नोट—बहुविकल्पीय प्रश्नों के उत्तर जानने के लिए पाठ्य-पुस्तक के पृष्ठ संख्या 249 से 251 तक का अवलोकन कीजिए।

13

ज्यामितीय रचनाएँ
(Geometrical Constructions)

अभ्यास 13.1

1. एक त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसकी भुजाएँ 4.0 सेमी, 5.0 सेमी, और 6.0 सेमी हैं। इसके परिवृत्त की रचना कीजिए और त्रिज्या नापिए।

हल– **दिया है**— ΔABC में $AB = 4.0$ सेमी, $BC = 5.0$ सेमी, तथा $CA = 6.0$ सेमी

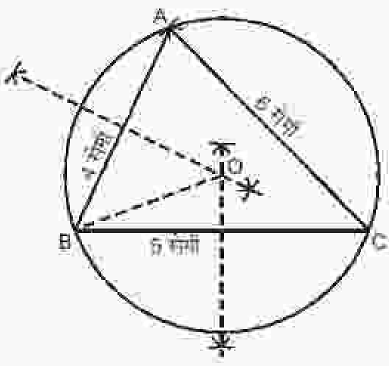
रचना करनी है— ΔABC एवं इसके परिवृत्त को।

त्रिभुज की रचना के चरण— (i) सर्वप्रथम रेखाखंड $BC = 5.0$ सेमी खींचा।

(ii) B को केन्द्र मानकर 4.0 सेमी त्रिज्या लेकर एक चाप खींचा।

(iii) C को केन्द्र मानकर 6.0 सेमी त्रिज्या लेकर दूसरा चाप लगाया, जो पहले चाप को बिन्दु A पर काटता है।

(iv) बिन्दु A से बिन्दु B और C को मिलाया। इस प्रकार प्राप्त ΔABC ही अभीष्ट त्रिभुज है।



त्रिभुज के परिवृत्त की रचना के चरण—

(v) ΔABC की दो भुजाओं AB तथा BC के लम्ब अर्द्धक खींचे, जो एक-दूसरे को बिन्दु O पर काटते हैं।

(vi) O को केन्द्र मानकर तथा OB त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचा।

यही अभीष्ट परिवृत्त है, जो ΔABC के तीनों शीर्षों से होकर जाता है। परिवृत्त की त्रिज्या मापने पर $OB = OC = OA = 2.7$ सेमी प्राप्त होती है।

2. 3.5 सेमी भुजा के एक समबाहु त्रिभुज का परिवृत्त खींचिए।

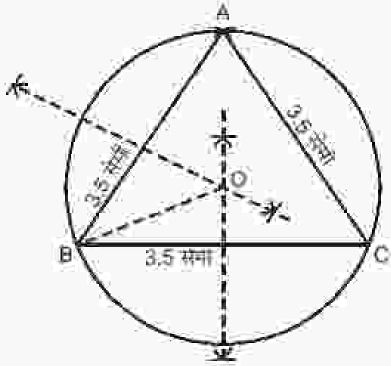
हल– **ज्ञात है**— समबाहु ΔABC जिसकी भुजा 3.5 सेमी है।

रचना करनी है— समबाहु ΔABC एवं इसके परिवृत्त को।

त्रिभुज की रचना के चरण—

(i) सर्वप्रथम रेखाखंड $BC = 3.5$ सेमी खींचा।

(ii) बिन्दु B को केन्द्र मानकर 3.5 सेमी की त्रिज्या लेकर एक चाप लगाया।



(iii) बिन्दु C को केन्द्र मानकर 3.5 सेमी त्रिज्या लेकर दूसरा चाप लगाया, जो पहले चाप को बिन्दु A पर काटता है।

(iv) बिन्दु A से B तथा C को मिलाया। इस प्रकार प्राप्त ΔABC अभीष्ट त्रिभुज है जिसकी प्रत्येक भुजा 3.5 सेमी है।

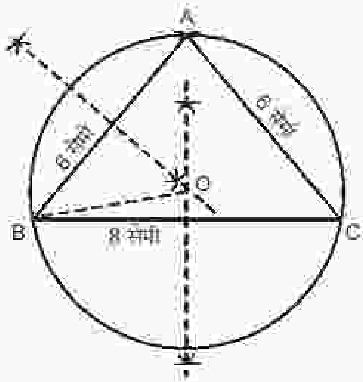
त्रिभुज के परिवृत्त की रचना के चरण—

(i) प्राप्त ΔABC की दो भुजाओं AB व BC के लम्ब अर्द्धक खींचे, जो एक-दूसरे को बिन्दु O पर काटते हैं।

(ii) बिन्दु O को केन्द्र मानकर तथा OB त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचा, जो समबाहु ΔABC के शीर्षों से होकर जाता है। यही अभीष्ट परिवृत्त है।

3. एक समद्विबाहु त्रिभुज की रचना कीजिए जिसका आधार 8.0 सेमी तथा बराबर भुजाओं में से प्रत्येक 6.0 सेमी हो। इसके परिगत वृत्त की रचना कीजिए।

हल– ज्ञात है— समद्विबाहु ΔABC, जिसका आधार $BC = 8.0$ सेमी तथा बराबर भुजाएं $AB = AC = 6.0$ सेमी



रचना करनी है— समद्विबाहु ΔABC एवं इसके परिगत वृत्त की।

त्रिभुज की रचना के चरण—

(i) सर्वप्रथम रेखाखंड $BC = 8.0$ सेमी खींचा।

(ii) बिन्दु B को केन्द्र मानकर तथा 6.0 सेमी त्रिज्या लेकर एक चाप लगाया।

(iii) बिन्दु C को केन्द्र मानकर तथा 6.0 सेमी त्रिज्या का दूसरा चाप लगाया, जो पहले चाप को बिन्दु A पर काटता है।

(iv) बिन्दु A से बिन्दु B व C को मिलाया। इस प्रकार प्राप्त ΔABC अभीष्ट त्रिभुज है।

त्रिभुज ABC के परिगत वृत्त की रचना के चरण—

(i) समद्विबाहु ΔABC की दो भुजाओं AB व BC के लम्ब अर्द्धक खींचे, जो एक-दूसरे को बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते हैं।

(ii) बिन्दु O को केन्द्र मानकर तथा OB त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचा, जो बिन्दुओं A, B तथा C से होकर जाता है। यही अभीष्ट परिगत वृत्त है।

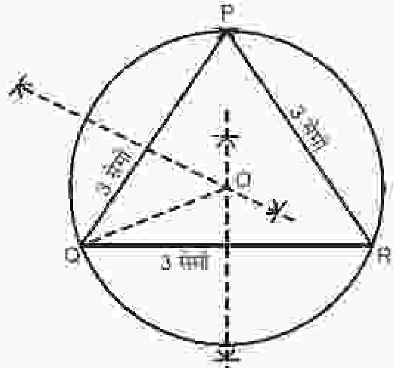
4. एक समबाहु त्रिभुज की रचना कीजिए जिसकी प्रत्येक भुजा की माप 3 सेमी है। इस त्रिभुज के परिगत वृत्त की रचना कीजिए।

हल– ज्ञात है— 3 सेमी भुजा का एक समबाहु ΔPQR।

रचना करनी है— ΔPQR एवं इसके परिगत वृत्त की।

त्रिभुज की रचना के चरण—

(i) सर्वप्रथम रेखाखंड $QR = 3$ सेमी खींचा।



(ii) बिन्दु R को केन्द्र मानकर तथा 3 सेमी त्रिज्या लेकर एक चाप लगाया।

(iii) बिन्दु Q को केन्द्र मानकर तथा 3 सेमी त्रिज्या लेकर दूसरा चाप लगाया, जो पहले चाप को बिन्दु P पर काटता है।

(iv) बिन्दु P से बिन्दु R व Q को मिलाया। इस प्रकार प्राप्त ΔPQR अभीष्ट त्रिभुज है।

त्रिभुज PQR के परिगत वृत्त की रचना के चरण—

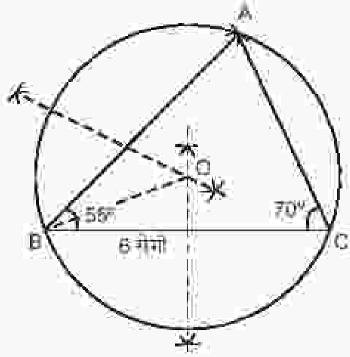
(i) ΔPQR की दो भुजाओं PQ तथा QR के लम्ब अर्द्धक खींचे, जो एक-दूसरे को बिन्दु O पर काटते हैं।

(ii) बिन्दु O को केन्द्र मानकर तथा OQ त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचा, जो बिन्दुओं P, Q तथा R से होकर जाता है। यही ΔPQR का अभीष्ट परिगत वृत्त है।

5. ΔABC और उसके परिवृत्त की रचना कीजिए जबकि $BC = 6$ सेमी तथा $\angle B = 55°$ तथा $\angle C = 70°$।

हल– **ज्ञात है**— ΔABC जिसमें भुजा $BC = 6.0$ सेमी, $\angle B = 55°$ तथा $\angle C = 70°$।

रचना करनी है— ΔABC एवं इसके परिवृत्त की।



त्रिभुज की रचना के चरण—

(i) सर्वप्रथम रेखाखंड $BC = 6.0$ सेमी खींचा।

(ii) बिन्दु B पर 55° का कोण बनाता हुआ एक रेखाखंड खींचा।

(iii) बिन्दु C पर 70° का कोण बनाता हुआ एक रेखाखंड खींचा, जो बिन्दु B पर खींचे गए रेखाखंड को बिन्दु A पर प्रतिच्छेद करता है। इस प्रकार प्राप्त ΔABC अभीष्ट त्रिभुज है।

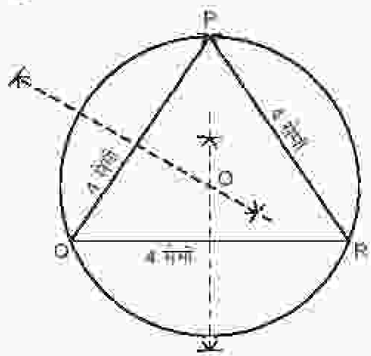
त्रिभुज ABC के परिवृत्त की रचना के चरण—

(i) रेखाखंड AB और BC के लम्बअर्द्धक खींचे, जो एक-दूसरे को बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते हैं।

(ii) बिन्दु O को केन्द्र मानकर एवं OB त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचा, जो बिन्दुओं A व C से भी होकर जाता है। यह ΔABC का अभीष्ट परिवृत्त है।

6. 4 सेमी भुजा के समबाहु त्रिभुज की रचना कर उसके परिवृत्त की रचना कीजिए।

हल– **ज्ञात है**— समबाहु ΔPQR, जिसकी भुजा 4 सेमी है।



रचना करनी है— ΔPQR, एवं इसके परिवृत्त की।

त्रिभुज की रचना के चरण—

(i) सर्वप्रथम रेखाखंड $QR = 4$ सेमी खींचा।

(ii) बिन्दु Q को केन्द्र मानकर तथा 4 सेमी त्रिज्या का एक चाप लगाया गया।

(iii) बिन्दु R को केन्द्र मानकर तथा 4 सेमी त्रिज्या लेकर दूसरा चाप लगाया जो पहले चाप को बिन्दु P पर काटता है।

(iv) बिन्दु P को बिन्दु Q व R से मिलाया। इस प्रकार प्राप्त ΔPQR अभीष्ट त्रिभुज है।

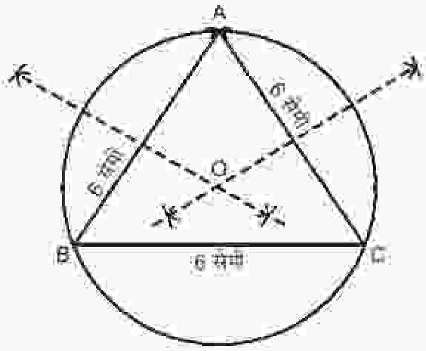
त्रिभुज के परिवृत्त की रचना के चरण—

(i) भुजा PQ तथा QR के लम्बअर्द्धक खींचे, जो एक-दूसरे को बिन्दु O पर काटते हैं।

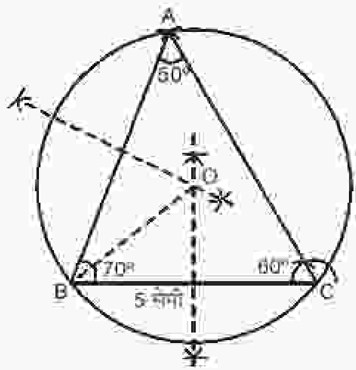
(ii) बिन्दु O को केन्द्र मानकर तथा OQ त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचा जो बिन्दु P, Q तथा R से होकर जाता है। इस प्रकार प्राप्त वृत्त ΔPQR का अभीष्ट परिवृत्त है।

7. 6 सेमी भुजा के समबाहु त्रिभुज की रचना कर उसके परिवृत्त की रचना कीजिए।

हल– रचना के चरण प्रश्न-6 के हल की भाँति लिखिए।



8. ΔABC की रचना कीजिए, जिसमें $BC = 5$ सेमी, $\angle ACB = 60°$ और $\angle BAC = 50°$ है। ΔABC के परिवृत्त खींचिए।



हल– **ज्ञात है—** ΔABC, जिसमें भुजा $BC = 5$ सेमी, $\angle ACB = 60°$ तथा $\angle BAC = 50°$।

रचना करनी है— ΔABC एवं इसके परिवृत्त की।

त्रिभुज की रचना के चरण—

(i) सर्वप्रथम रेखाखंड $BC = 5$ सेमी खींचा।

(ii) बिन्दु C पर $60°$ का कोण बनाता हुआ एक रेखाखंड खींचा।

(iii) बिन्दु B पर $180° - (60° + 50°) = 180° - 110° = 70°$ कोण बनाता हुआ रेखाखंड खींचा जो पहले रेखाखंड को बिन्दु A पर काटता है। इस प्रकार प्राप्त ΔABC अभीष्ट त्रिभुज है।

त्रिभुज के परिवृत्त की रचना के चरण—

(i) ΔABC की भुजाओं AB तथा BC पर लम्बअर्द्ध खींचे, जो एक-दूसरे को बिन्दु O पर काटते हैं।

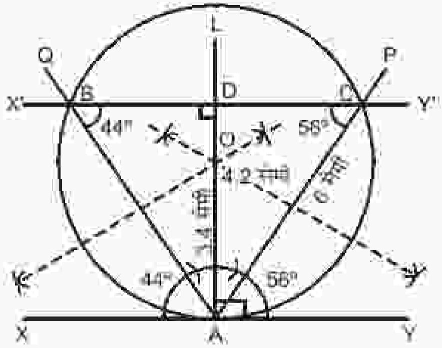
(ii) बिन्दु O को केन्द्र मानकर तथा OB त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचा जो बिन्दुओं A, B व C से होकर जाता है। इस प्रकार प्राप्त वृत्त ΔABC का अभीष्ट परिवृत्त है।

9. ΔABC की रचना कीजिए, जिसमें शीर्ष A से भुजा BC पर खींचा गया लम्ब = 4.2 सेमी, $\angle B = 44°$, $\angle C = 56°$। ΔABC के परिवृत्त की रचना कीजिए। ΔABC के परिवृत्त की त्रिज्या की माप बताइए।

हल—ज्ञात है— ΔABC में $\angle B = 44°$, $\angle C = 56°$ तथा शीर्ष A से भुजा BC पर लम्ब $AD = 4.2$ सेमी।

रचना करनी है—ΔABC एवं इसके परिवृत्त को।

त्रिभुज की रचना के चरण—



(i) सर्वप्रथम रेखाखंड XY खींचा।

(ii) रेखाखंड XY पर बिन्दु A लिया।

(iii) बिन्दु A पर लम्ब रेखाखंड LA खींचा।

(iv) लम्ब रेखाखंड AL पर एक बिन्दु D इस प्रकार लिया कि $AD = 4.2$ सेमी।

(v) बिन्दु D से होकर एक ऋजु रेखा $X'Y' \parallel XY$ खींची।

(vi) बिन्दु A से $\angle XAQ = 44° = \angle B$ तथा $\angle YAP = 56° = \angle C$ बनाते हुए रेखाखंड खींचे, जो रेखा $X'Y'$ को क्रमशः बिन्दु B व C पर काटते हैं। इस प्रकार प्राप्त ΔABC अभीष्ट त्रिभुज है।

त्रिभुज के परिवृत्त की रचना के चरण—

(i) भुजाओं AB तथा AC के लम्बअर्द्धक खींचे, जो एक-दूसरे को बिन्दु O पर काटते हैं।

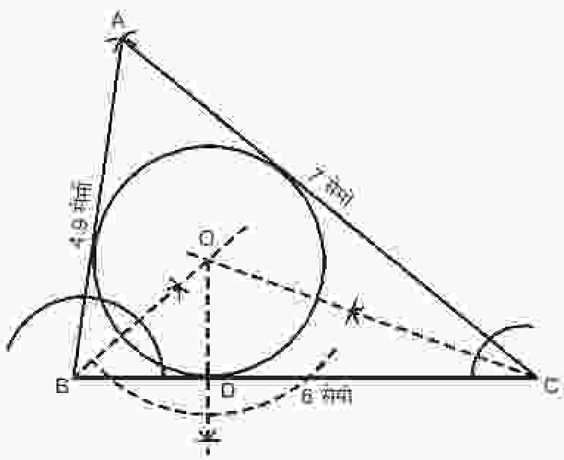
(ii) बिन्दु O को केन्द्र मानकर तथा OA त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचा जो ΔABC के शीर्षों से होकर जाता है। इस प्रकार प्राप्त वृत्त दिए गए ΔABC का अभीष्ट परिगत वृत्त है, जिसकी त्रिज्या मापने पर 3.4 सेमी आती है।

10. ΔABC की रचना कीजिए, जिसमें भुजा $AB = 4.9$ सेमी, $BC = 6.0$ सेमी तथा $CA = 7.0$ सेमी है। इस त्रिभुज का अन्तः वृत्त खींचिए और इसकी त्रिज्या नापिए।

हल—ज्ञात है— ΔABC में, भुजा $AB = 4.9$ सेमी, $BC = 6.0$ सेमी तथा $CA = 7.0$ सेमी।

रचना करनी है—ΔABC एवं इसके अन्तः वृत्त को।

त्रिभुज की रचना के चरण—



(i) सर्वप्रथम रेखाखंड $BC = 6.0$ सेमी खींचा।

(ii) बिन्दु B को केन्द्र मानकर तथा 4.9 सेमी त्रिज्या लेकर एक चाप लगाया।

(iii) बिन्दु C को केन्द्र मानकर तथा 7 सेमी त्रिज्या लेकर दूसरा चाप लगाया जो पहले चाप को बिन्दु A पर काटता है।

(iv) बिन्दु A को बिन्दु B व C से मिलाया।

इस प्रकार प्राप्त ΔABC अभीष्ट Δ है।

त्रिभुज के अन्तः वृत्त की रचना के चरण—

(i) ΔABC के $\angle B$ व $\angle C$ के अर्द्धक खींचे, जो एक-दूसरे को बिन्दु O पर काटते हैं।

(ii) बिन्दु O से होकर भुजा BC पर लम्ब खींचा जो BC को बिन्दु D पर काटता है।

(iii) बिन्दु O को केन्द्र मानकर तथा OD त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचा, जो ΔABC की तीनों भुजाओं को स्पर्श करता है। इस प्रकार प्राप्त वृत्त ΔABC का अन्तः वृत्त है। जिसकी त्रिज्या मापने पर 1.4 सेमी प्राप्त होती है।

11. 5 सेमी भुजा वाला समबाहु त्रिभुज खींचकर इसके अन्तः वृत्त की रचना कीजिए।

हल– **ज्ञात है—** 5 सेमी भुजा वाला समबाहु ΔABC

रचना करनी है— समबाहु ΔABC एवं इसके अन्तः वृत्त की।

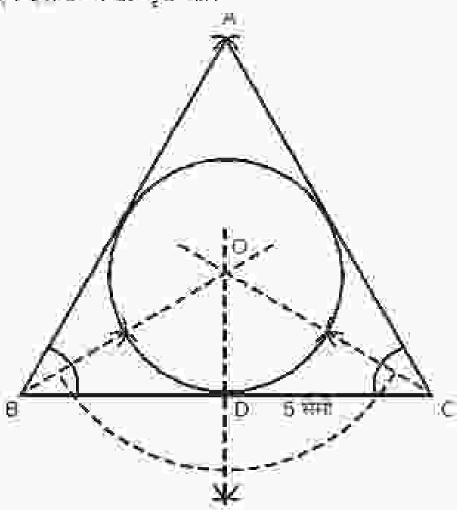
त्रिभुज की रचना के चरण—

(i) सर्वप्रथम रेखाखंड $BC = 5$ सेमी खींचा।

(ii) बिन्दु B को केन्द्र मानकर तथा 5 सेमी त्रिज्या लेकर एक चाप लगाया।

(iii) बिन्दु C को केन्द्र मानकर तथा 5 सेमी त्रिज्या लेकर दूसरा चाप लगाया, जो पहले चाप को बिन्दु A पर काटता है।

(iv) बिन्दु A से बिन्दु B व C को मिलाया। इस प्रकार प्राप्त त्रिभुज अभीष्ट समबाहु त्रिभुज है।



त्रिभुज के अन्तः वृत्त की रचना के चरण—

(i) समबाहु ΔABC के $\angle B$ व $\angle C$ के अर्द्ध खींचे जो एक-दूसरे को बिन्दु O पर काटते हैं।

(ii) बिन्दु O से होकर भुजा BC पर लम्ब खींचा, जो भुजा BC को बिन्दु D पर काटता है।

(iii) बिन्दु O को केन्द्र मानकर तथा OD त्रिज्या लेकर वृत्त खींचा, जो ΔABC की तीनों भुजाओं को स्पर्श करता है। इस प्रकार प्राप्त वृत्त ΔABC का अभीष्ट अन्तः वृत्त है।

12. ΔABC की रचना कीजिए, जिसकी भुजा $AB = 4.4$ सेमी, $BC = 5.2$ सेमी तथा $\angle ABC = 55°$ है। इस त्रिभुज का परिवृत्त खींचिए।

हल– **ज्ञात है—** ΔABC, जिसकी भुजा $AB = 4.4$ सेमी, $BC = 5.2$ सेमी तथा $\angle ABC = 55°$।

रचना करनी है— ΔABC एवं इसके परिवृत्त को।

त्रिभुज की रचना के चरण—

(i) सर्वप्रथम रेखाखंड $BC = 5.2$ सेमी खींचा।

(ii) बिन्दु B से $55°$ बनाती हुई रेखा BX खींची।

(iii) बिन्दु B को केन्द्र मानकर तथा 4.4 सेमी त्रिज्या लेकर एक चाप लगाया जो रेखा BX को बिन्दु A पर काटता है।

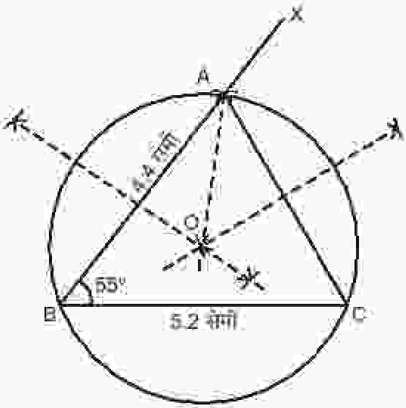
(iv) बिन्दु A को C से मिलाया।

इस प्रकार प्राप्त ΔABC अभीष्ट त्रिभुज है।

त्रिभुज के परिवृत्त की रचना के चरण—

(i) ΔABC की भुजाओं AB व AC के लम्बअर्द्धक खींचे, जो एक-दूसरे को बिन्दु O पर काटते हैं।

(ii) बिन्दु O को केन्द्र मानकर तथा OA त्रिज्या लेकर वृत्त खींचा। जो ΔABC के तीनों शीर्षों से होकर जाता है। इस प्रकार प्राप्त वृत्त ΔABC का अभीष्ट परिवृत्त है।



13. एक त्रिभुज ABC की रचना कीजिए, जिसमें $BC = 5$ सेमी, $\angle B = 90°$ और भुजा $CA = 7$ सेमी है। इस त्रिभुज का परिवृत्त खींचिए।

हल—**ज्ञात है**— ΔABC जिसमें भुजा $BC = 5$ सेमी, $\angle B = 90°$ और भुजा $CA = 7$ सेमी।

रचना करनी है—ΔABC एवं इसके परिवृत्त की।

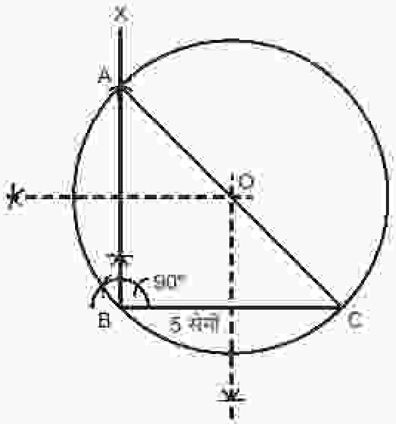
त्रिभुज की रचना के चरण—

(i) सर्वप्रथम रेखाखंड $BC = 5$ सेमी खींचा।

(ii) बिन्दु B से $90°$ का कोण बनाती हुई रेखा BX खींची।

(iii) बिन्दु C को केन्द्र मानकर तथा 7 सेमी त्रिज्या लेकर एक चाप लगाया जो रेखा BX को बिन्दु A पर काटता है।

(iv) बिन्दु A को बिन्दु C से मिलाया। इस प्रकार प्राप्त ΔABC अभीष्ट त्रिभुज है।



त्रिभुज के परिवृत्त की रचना के चरण—

(i) ΔABC की भुजाओं AB व BC के लम्बअर्द्धक खींचे, जो एक-दूसरे को बिन्दु O पर काटते हैं।

(ii) बिन्दु O को केन्द्र मानकर तथा OA त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचा, जो ΔABC के शीर्षों से होकर जाता है। इस प्रकार प्राप्त वृत्त ΔABC का अभीष्ट परिवृत्त है।

14. ΔABC की रचना कीजिए, जिसका आधार $AB = 8.0$ सेमी, ऊँचाई $= 3.5$ सेमी और शीर्ष $\angle ACB = 90°$। इसके अन्तः वृत्त की रचना कीजिए।

हल—**ज्ञात है**— ΔABC, जिसका आधार $AB = 8.0$ सेमी, ऊँचाई $= 3.5$ सेमी तथा शीर्ष $\angle ACB = 90°$

रचना करनी है—ΔABC एवं इसके अन्तः वृत्त की।

त्रिभुज की रचना के चरण—

(i) सर्वप्रथम एक ऋजु रेखा XY खींची।

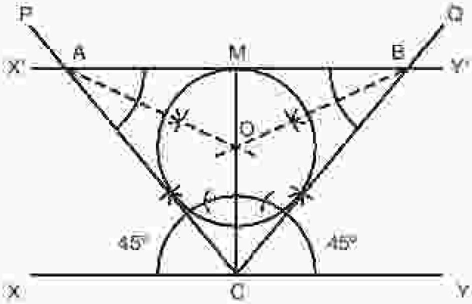
(ii) ऋजु रेखा XY पर एक बिन्दु C लिया।

(iii) बिन्दु C से XY पर लम्ब CM इस प्रकार खींचा कि $CM = 3.5$ सेमी हो।

(iv) बिन्दु M से होकर ऋजु रेखा $X'Y' \| XY$ खींची।

(v) बिन्दु C से $\angle XCP = 45°$ का कोण बनाती हुई रेखा CP खींची जो रेखा $X'Y'$ को बिन्दु A पर काटती है।

(vi) पुनः बिन्दु C से $\angle YCQ = 45°$ का कोण बनाती हुई रेखा CQ खींची। इस प्रकार प्राप्त त्रिभुज ABC अभीष्ट त्रिभुज है।



त्रिभुज के अन्तः वृत्त की रचना के चरण—

(i) ΔABC के $\angle A$ तथा $\angle C$ के अर्द्धक खींचे जो एक-दूसरे को बिन्दु O पर काटते हैं।

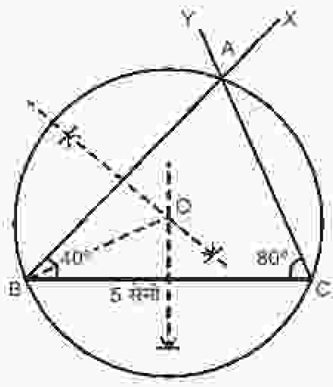
(ii) बिन्दु O से ΔABC के आधार AB पर लम्ब OM डाला।

(iii) बिन्दु O को केन्द्र मानकर तथा OM त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचा, जो ΔABC की तीनों भुजाओं को स्पर्श करता है। यह ΔABC का अभीष्ट अन्तः वृत्त है।

15. एक त्रिभुज ABC खींचिए जिसमें $BC = 5.0$ सेमी, $\angle A = 60°$ और $\angle B = 40°$। इस त्रिभुज के परिगत वृत्त की रचना कीजिए।

हल—**ज्ञात है**— ΔABC, जिसमें भुजा $BC = 5.0$ सेमी, $\angle A = 60°$ तथा $\angle B = 40°$।

रचना करनी है— ΔABC एवं इसके परिगत वृत्त को।



त्रिभुज की रचना के चरण—

(i) सर्वप्रथम रेखाखंड $BC = 5.0$ सेमी खींचा।

(ii) बिन्दु B से $40°$ का कोण बनाती हुई रेखा BX खींची।

(iii) बिन्दु C से $180° - (\angle A + \angle B) = 180° - (60° + 40°) = 180° - 100° = 80°$ का कोण बनाती हुई रेखा CY खींची जो रेखा BX को बिन्दु A पर काटती है। यह ΔABC ही अभीष्ट त्रिभुज है।

त्रिभुज के परिवृत्त की रचना के चरण—

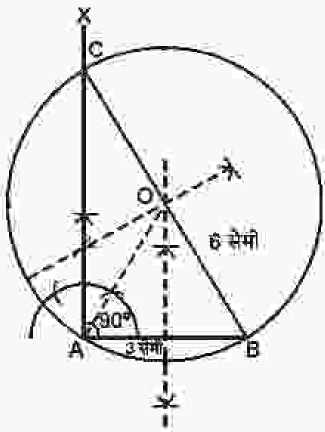
(i) ΔABC की भुजाओं AB तथा BC के लम्बअर्द्धक खींचे, जो एक-दूसरे को बिन्दु O पर काटते हैं।

(ii) बिन्दु O को केन्द्र मानकर तथा OB त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचा जो ΔABC के शीर्षों से होकर जाता है। यही ΔABC का अभीष्ट परिगत वृत्त है।

16. एक ΔABC की रचना कीजिए जिसमें $\angle A = 90°$, $AB = 3$ सेमी, $BC = 6$ सेमी है। इस त्रिभुज के परिगत वृत्त की रचना कीजिए। वृत्त की त्रिज्या मापकर लिखिए।

हल—**ज्ञात है**— ΔABC जिसमें $\angle A = 90°$, भुजा $AB = 3$ सेमी तथा $BC = 6$ सेमी।

रचना करनी है— ΔABC एवं इसके परिगत वृत्त की।



त्रिभुज की रचना के चरण—

(i) सर्वप्रथम रेखाखंड $AB = 3$ सेमी खींचा।

(ii) बिन्दु A से 90° का कोण बनाती हुई रेखा AX खींची।

(iii) बिन्दु B को केन्द्र मानकर तथा 6 सेमी त्रिज्या लेकर एक चाप लगाया, जो रेखा AX को बिन्दु C पर काटता है।

(iv) बिन्दु C से B को मिलाया। इस प्रकार प्राप्त ΔABC ही अभीष्ट त्रिभुज है।

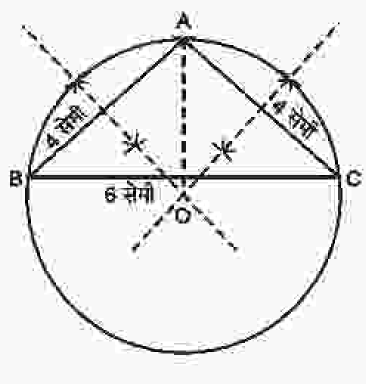
त्रिभुज के परिवृत्त की रचना के चरण—

(i) ΔABC की भुजाओं AB व BC के लम्बअर्द्धक खींचे, जो एक-दूसरे को बिन्दु O पर काटते हैं।

(ii) बिन्दु O को केन्द्र मानकर तथा OA त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचा जो त्रिभुज ABC के शीर्षों से होकर जाता है। यही वृत्त ΔABC का अभीष्ट परिगत वृत्त है, जिसकी त्रिज्या मापने पर 3 सेमी प्राप्त होती है।

17. एक त्रिभुज ABC की भुजाओं की माप $AB = 4$ सेमी, $BC = 6$ सेमी, $CA = 4$ सेमी है। त्रिभुज एवं उसके परिवृत्त की रचना कीजिए।

हल– ज्ञात है— ΔABC जिसमें भुजा $AB = 4$ सेमी, $BC = 6$ सेमी तथा $CA = 4$ सेमी।



रचना करनी है— ΔABC एवं उसके परिवृत्त की।

त्रिभुज की रचना के चरण—

(i) सर्वप्रथम रेखाखंड $BC = 6$ सेमी खींचा।

(ii) बिन्दु B को केन्द्र मानकर तथा 4 सेमी त्रिज्या लेकर एक चाप लगाया।

(iii) बिन्दु C को केन्द्र मानकर तथा 4 सेमी त्रिज्या लेकर दूसरा चाप लगाया जो पहले चाप को बिन्दु A पर काटता है।

(iv) बिन्दु A से बिन्दु B व C को मिलाया। इस प्रकार प्राप्त ΔABC अभीष्ट त्रिभुज है।

त्रिभुज के परिवृत्त की रचना के चरण—

(i) ΔABC की भुजाओं AB व AC के लम्बअर्द्धक खींचे, जो एक-दूसरे को बिन्दु O पर काटते हैं।

(ii) बिन्दु O को केन्द्र मानकर तथा OA त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचा, जो ΔABC के शीर्षों से होकर जाता है। यही वृत्त ΔABC का अभीष्ट परिवृत्त है।

18. एक त्रिभुज ABC, की रचना कीजिए, जहाँ $AB = 3.6$ सेमी, $BC = 6$ सेमी, तथा $CA = 4.8$ सेमी त्रिभुज का परिकेन्द्र ज्ञात कीजिए। रचना भी लिखिए।

हल– ज्ञात है— ΔABC, जिसमें भुजा $AB = 3.6$ सेमी, $BC = 6$ सेमी, तथा $CA = 4.8$ सेमी।

रचना करनी है— ΔABC एवं इसका परिकेन्द्र ज्ञात करना।

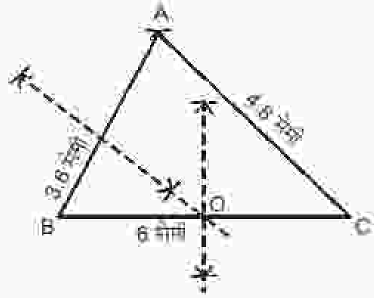
त्रिभुज की रचना के चरण—

(i) सर्वप्रथम रेखाखंड $BC = 6$ सेमी खींचा।

(ii) बिन्दु B को केन्द्र मानकर तथा 3.6 सेमी त्रिज्या लेकर एक चाप लगाया।

(iii) बिन्दु C को केन्द्र मानकर तथा 4.8 सेमी त्रिज्या लेकर दूसरा चाप लगाया जो पहले चाप को बिन्दु A पर काटता है।

(iv) बिन्दु A से बिन्दु B व C को मिलाया। इस प्रकार प्राप्त ΔABC अभीष्ट त्रिभुज है।



(v) ΔABC की भुजाओं AB व BC के लम्ब अर्द्धक खींचे, जो एक-दूसरे को बिन्दु O पर काटते हैं। यह बिन्दु O, ΔABC का अभीष्ट परिकेन्द्र है।

19. एक समकोण त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसका कर्ण 8 सेमी तथा आधार 4.8 सेमी है। इस त्रिभुज के अन्तः वृत्त की रचना कीजिए।

हल– **ज्ञात है**— ΔABC में कर्ण $AC = 8$ सेमी, आधार $BC = 4.8$ सेमी $\angle B =$ समकोण।

रचना करनी है— ΔABC एवं इसके अन्तः वृत्त की।

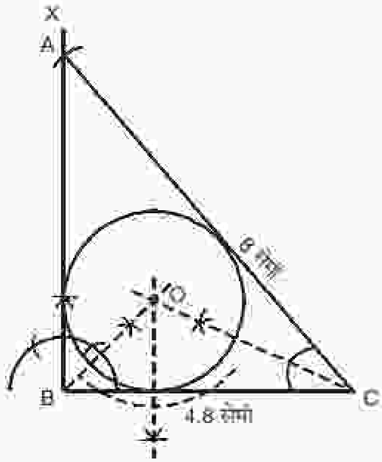
त्रिभुज की रचना के चरण—

(i) सर्वप्रथम रेखाखंड $BC = 4.8$ सेमी खींचा।

(ii) बिन्दु B पर समकोण बनाती हुई रेखा BX खींची।

(iii) बिन्दु C को केन्द्र मानकर तथा 8 सेमी त्रिज्या लेकर चाप लगाया, जो रेखा BX को बिन्दु A पर काटती है।

(iv) बिन्दु A से C को मिलाया। इस प्रकार प्राप्त ΔABC अभीष्ट त्रिभुज है।



त्रिभुज के अन्तः वृत्त की रचना के चरण—

(i) ΔABC के $\angle B$ व $\angle C$ के समद्विभाजक खींचे, जो एक-दूसरे को बिन्दु O पर काटते हैं।

(ii) बिन्दु O से होकर जाने वाला तथा भुजा BC पर लम्ब OD खींचा।

(iii) बिन्दु O को केन्द्र मानकर तथा OD त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचा। जो ΔABC की तीनों भुजाओं को स्पर्श करता है। इस प्रकार प्राप्त वृत्त ΔABC का अभीष्ट अन्तः वृत्त है।

20. ΔABC की रचना कीजिए, जिसमें $AB = 6$ सेमी, $\angle A = 50°$ तथा $\angle B = 60°$ है। इस Δ का अन्तः वृत्त खींचिए। रचना विधि भी लिखिए। वृत्त की त्रिज्या नापकर लिखिए।

हल– **ज्ञात है**— जिसमें भुजा $AB = 6$ सेमी, $\angle A = 50°$ तथा $\angle B = 60°$ है।

रचना करनी है—ΔABC एवं इसके अन्तः वृत्त की।

त्रिभुज की रचना के चरण—

(i) सर्वप्रथम रेखाखंड $AB = 6$ सेमी खींचा।

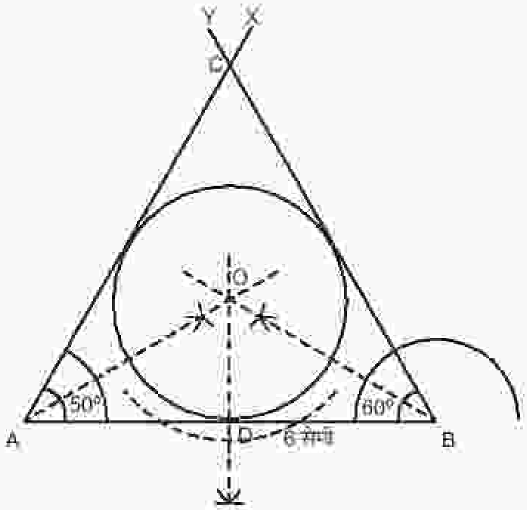
(ii) बिन्दु A पर $50°$ का कोण बनाती हुई रेखा XA खींची।

(iii) बिन्दु B पर $60°$ का कोण बनाती हुई रेखा YB खींची, जो रेखा XA को बिन्दु C पर काटती है। इस प्रकार प्राप्त ΔABC अभीष्ट त्रिभुज है।

त्रिभुज के अन्तः वृत्त की रचना के चरण—

(i) ΔABC के $\angle A$ तथा $\angle B$ के समद्विभाजक खींचे, जो एक-दूसरे को बिन्दु O पर काटते हैं।

(ii) बिन्दु O से होकर जाने वाला तथा भुजा AB पर लम्ब OD खींचा।



(iii) बिन्दु O को केन्द्र मानकर तथा OD त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचा, जो ΔABC की तीनों भुजाओं को स्पर्श करता है। इस प्रकार प्राप्त वृत्त, ΔABC का अभीष्ट अन्तः वृत्त है। त्रिज्या मापने पर 1.5 सेमी प्राप्त होती है।

21. 4 सेमी भुजा के समबाहु त्रिभुज की रचना कीजिए। इस वृत्त के अन्तः वृत्त की रचना भी कीजिए।

हल– **ज्ञात है**— 4 सेमी भुजा का समबाहु ΔABC।

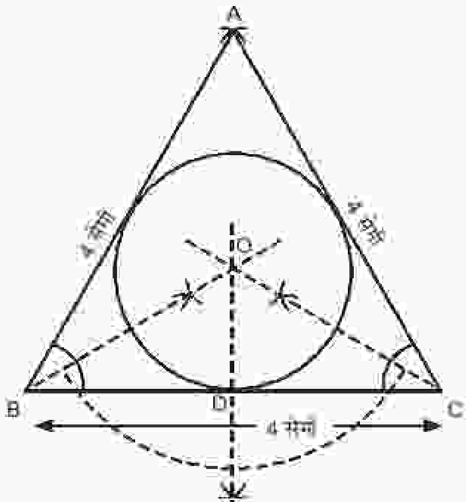
रचना करनी है— ΔABC एवं इसके अन्तः वृत्त की।

त्रिभुज की रचना के चरण—

(i) सर्वप्रथम रेखाखंड $BC = 4$ सेमी खींचा।

(ii) बिन्दु B को केन्द्र मानकर तथा 4 सेमी त्रिज्या लेकर एक चाप लगाया।

(iii) बिन्दु C को केन्द्र मानकर तथा 4 सेमी त्रिज्या लेकर दूसरा चाप लगाया, जो पहले चाप को बिन्दु A पर काटता है।



(iv) बिन्दु A को बिन्दु B तथा C से मिलाया। इस प्रकार प्राप्त त्रिभुज ABC अभीष्ट त्रिभुज है।

त्रिभुज के अन्तः वृत्त की रचना के चरण—

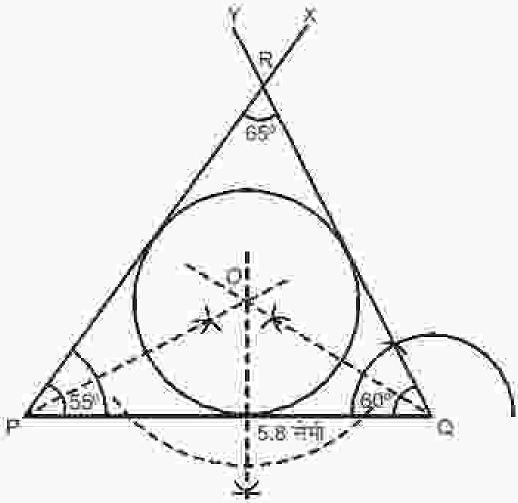
(i) ΔABC के $\angle B$ तथा $\angle C$ के समद्विभाजक खींचे, जो एक-दूसरे को बिन्दु O पर काटते हैं।

(ii) बिन्दु O से होकर जाने वाला तथा भुजा BC पर लम्ब OD खींचा।

(iii) बिन्दु O को केन्द्र मानकर तथा OD त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचा, जो ΔABC की तीनों भुजाओं को स्पर्श करता है। इस प्रकार प्राप्त यह वृत्त ही ΔABC का अभीष्ट अन्तः वृत्त है।

22. ΔPQR का अन्तः वृत्त खींचिए, जहाँ $PQ = 5.8$ सेमी, $\angle Q = 60°$ तथा $\angle R = 65°$ वृत्त की त्रिज्या भी मापकर लिखिए।

हल– **ज्ञात है—** ΔPQR जिसमें $PQ = 5.8$ सेमी, $\angle Q = 60°$ तथा $\angle R = 65°$।



रचना करनी है— ΔPQR एवं इसका अन्तः वृत्त।

त्रिभुज की रचना के चरण—

(i) सर्वप्रथम रेखाखंड $PQ = 5.8$ सेमी खींचा।

(ii) बिन्दु Q से $60°$ का कोण बनाती हुई रेखा QY खींची।

(iii) बिन्दु P से $180° - (60° + 65°) = 180° - 125° = 55°$ का कोण बनाती हुई रेखा PX खींची, जो रेखा QY को बिन्दु R पर काटती है। इस प्रकार प्राप्त ΔPQR अभीष्ट त्रिभुज है।

त्रिभुज के अन्तः वृत्त की रचना के चरण—

(i) ΔPQR के $\angle P$ तथा $\angle Q$ के समद्विभाजक खींचे, जो एक-दूसरे को बिन्दु O पर काटते हैं।

(ii) बिन्दु O से होकर जाने वाला भुजा PQ पर लम्ब OD खींचा।

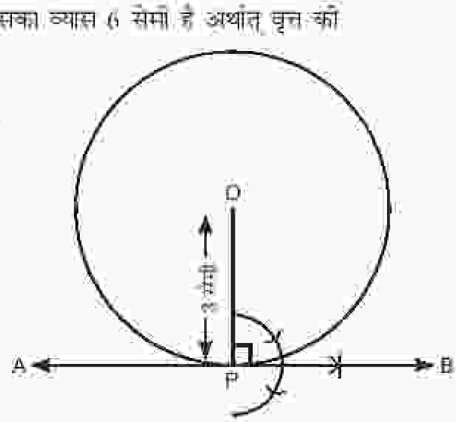
(iii) बिन्दु O को केन्द्र मानकर तथा OD त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचा, जो ΔPQR की तीनों भुजाओं को स्पर्श करता है। यह वृत्त ही ΔPQR का अभीष्ट अन्तः वृत्त है। अन्तः वृत्त की त्रिज्या मापने पर 1.6 सेमी प्राप्त होती है।

अभ्यास 13.2

1. 6.0 सेमी व्यास का एक वृत्त खींचिए। बिना वृत्त के केन्द्र का प्रयोग किए वृत्त के किसी बिन्दु पर स्पर्श रेखा खींचिए।

हल– **ज्ञात है—** केन्द्र O वाला एक वृत्त जिसका व्यास 6 सेमी है अर्थात् वृत्त की त्रिज्या = 3 सेमी,

रचना करनी है— 6 सेमी व्यास या 3 सेमी त्रिज्या वाले वृत्त की स्पर्शी खींचनी है।



रचना के चरण—

(i) सर्वप्रथम एक बिन्दु O लिया।

(ii) बिन्दु O को केन्द्र मानकर तथा 3 सेमी त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचा।

(iii) वृत्त पर कोई बिन्दु P लिया तथा बिन्दु O को P से मिलाया।

(iv) बिन्दु P पर त्रिज्या OP के साथ $90°$ का कोण बनाती रेखा APB खींची। रेखा APB ही दिए गए वृत्त की अभीष्ट स्पर्श रेखा है।

2. 6.0 सेमी व्यास के एक वृत्त की रचना कीजिए और वृत्त के किसी बिन्दु पर स्पर्श रेखा खींचिए और रचना-विधि लिखिए।

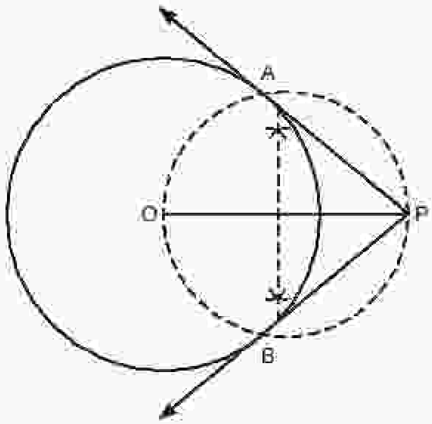
या 3.0 सेमी त्रिज्या का वृत्त खींचिए और उसके किसी बिन्दु पर स्पर्श रेखा की रचना कीजिए।

हल– प्रश्न संख्या 1 के हल की भाँति कीजिए।

3. एक वृत्त की रचना कीजिए जिसकी त्रिज्या = 3.0 सेमी है। वृत्त के केन्द्र से 5.0 सेमी दूरी पर एक बिन्दु लीजिए और उससे वृत्त पर स्पर्श रेखाएँ खींचिए। प्रत्येक स्पर्श रेखा की लम्बाई की माप बताइए।

हल– **ज्ञात है**— 3 सेमी त्रिज्या का वृत्त जिसका केन्द्र O है।

रचना करनी है— 3 सेमी त्रिज्या वाले वृत्त की रचना तथा वृत्त के केन्द्र O से 5 सेमी दूरी पर स्थित बिन्दु (P) से वृत्त पर स्पर्श रेखाएँ।



रचना के चरण—

(i) बिन्दु को केन्द्र मानकर तथा 3 सेमी त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचा।

(ii) वृत्त के केन्द्र O से 5 सेमी दूरी पर एक बिन्दु P लिया।

(iii) OP को व्यास मानकर दूसरा वृत्त खींचा, जो पहले वृत्त को बिन्दु A व B पर काटता है।

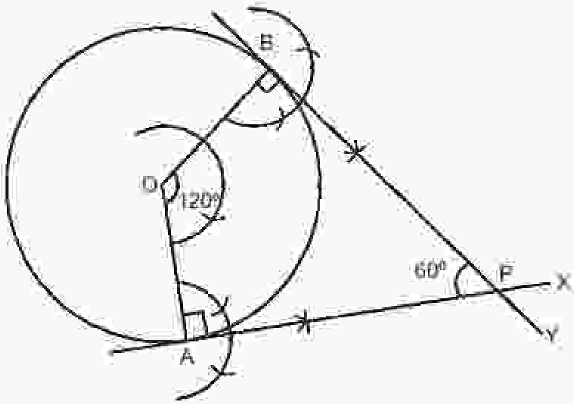
(iv) बिन्दु P से बिन्दु A व B को मिलाया।

इस प्रकार रेखाखण्ड PA तथा PB ही बिन्दु P से वृत्त की अभीष्ट स्पर्श रेखाएँ हैं। प्रत्येक स्पर्श रेखा की लम्बाई मापने पर 4 सेमी प्राप्त होती है।

4. 6 सेमी त्रिज्या वाले एक वृत्त की बाह्य बिन्दु से दो स्पर्श रेखाएँ खींचिए, जो एक-दूसरे के साथ 60° का कोण बनाती हैं।

हल– **ज्ञात है**— 6 सेमी त्रिज्या का एक वृत्त जिसका केन्द्र O है।

रचना करनी है— 6 सेमी त्रिज्या वाले वृत्त के किसी बाह्य बिन्दु P से वृत्त की दो स्पर्शी जिनके बीच का कोण $60°$ है।



रचना के चरण—

(i) सर्वप्रथम बिन्दु O को केन्द्र मानकर तथा 6

सेमी त्रिज्या लेकर वृत्त खींचा। यह वृत्त ही 6 सेमी त्रिज्या का अभीष्ट वृत्त है।

(ii) वृत्त पर कोई बिन्दु A लिया तथा OA को मिलाया।

(iii) केन्द्र O पर 120° का कोण बनाती हुई रेखा खींची, जो वृत्त को बिन्दु B पर मिलती है।

(iv) त्रिज्या OA के साथ बिन्दु A पर 90° का कोण बनाती हुई रेखा AX खींची।

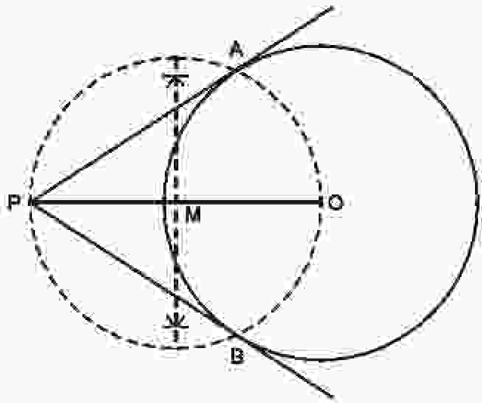
(v) त्रिज्या OB के साथ बिन्दु B पर 90° का कोण बनाती हुई रेखा BY खींची, जो रेखा AX को बिन्दु P पर काटती है।

इस प्रकार प्राप्त रेखाएँ PA एवं PB दिए गए वृत्त की अभीष्ट स्पर्श रेखाएँ हैं।

5. 4.0 सेमी त्रिज्या का वृत्त खींचिए। इसके केन्द्र से 7.0 सेमी दूरी पर स्थित बिन्दु से वृत्त पर स्पर्शी युग्म खींचिए।

हल– **ज्ञात है—** केन्द्र O तथा 4 सेमी त्रिज्या एक वृत्त तथा वृत्त के केन्द्र O से 7 सेमी दूरी पर स्थित बिन्दु P।

रचना करनी है— बिन्दु P से वृत्त पर स्पर्शी युग्म की।



रचना के चरण—

(i) बिन्दु O को केन्द्र मानकर तथा 4.0 सेमी त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचा।

(ii) रेखाखंड $OP = 7.0$ सेमी खींचा।

(iii) रेखाखंड OP का समद्विभाजक कर बिन्दु M ज्ञात किया।

(iv) बिन्दु M को केन्द्र मानकर तथा OM अथवा PM त्रिज्या लेकर वृत्त खींचा, जो केन्द्र O वाले वृत्त को बिन्दु A और B पर काटता है।

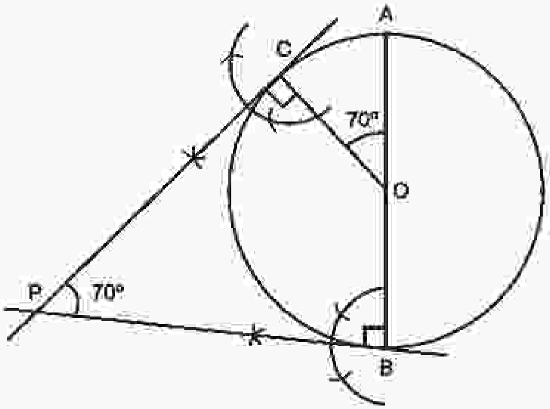
(v) रेखाखंड PA तथा PB खींचे।

इस प्रकार प्राप्त रेखाखंड PA तथा PB ही बिन्दु P से वृत्त का अभीष्ट रेखा युग्म है।

6. 5 सेमी त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए। किसी बाह्य बिन्दु से वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ खींचिए जो आपस में 70° का कोण बनाती हैं।

हल– **ज्ञात है—** 5 सेमी त्रिज्या का वृत्त जिसका केन्द्र O तथा इसकी दो स्पर्श रेखाओं के बीच का कोण 70° है।

रचना करनी है— 5 सेमी त्रिज्या तथा केन्द्र O वाले वृत्त की जिसकी बिन्दु P से स्पर्शियों PA तथा PB के बीच का कोण 70° है अर्थात $\angle CPB = 70°$।



रचना के चरण—

(i) $OA = 5$ सेमी त्रिज्या का एक वृत्त खींचा।

(ii) व्यास AOB खींचा।

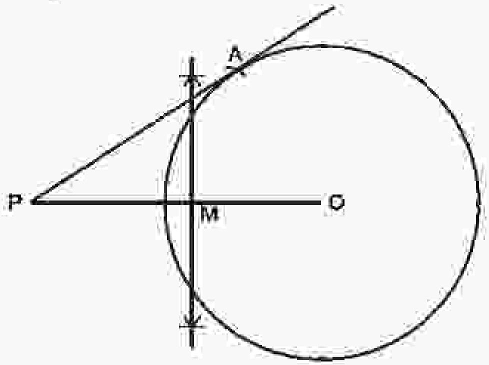
(iii) त्रिज्या OA के बिन्दु O पर $\angle COA = 70^\circ$ बनाया।

(iv) त्रिज्या OB तथा OC के बिन्दुओं B व C पर लम्ब BP तथा CP खींचे जो परस्पर बिन्दु P पर काटते हैं।

रेखाखंड PB व PC अभीष्ट स्पर्श रेखाएँ हैं।

7. त्रिज्या 3 सेमी लेकर वृत्त खींचिए। इस वृत्त के केन्द्र से 6 सेमी दूरी पर स्थित किसी बिन्दु से वृत्त की एक स्पर्शी की रचना कीजिए।

हल– **ज्ञात है—** केन्द्र O तथा 3 सेमी त्रिज्या वाला एक वृत्त।



रचना करनी है— वृत्त के केन्द्र O से 6 सेमी दूरी पर स्थित बिन्दु P से वृत्त की स्पर्शी PA की।

रचना के चरण—

(i) बिन्दु O को केन्द्र मानकर तथा 3 सेमी त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचा।

(ii) $OP = 6$ सेमी खींची।

(iii) OP का समद्विभाजक कर बिन्दु M ज्ञात किया।

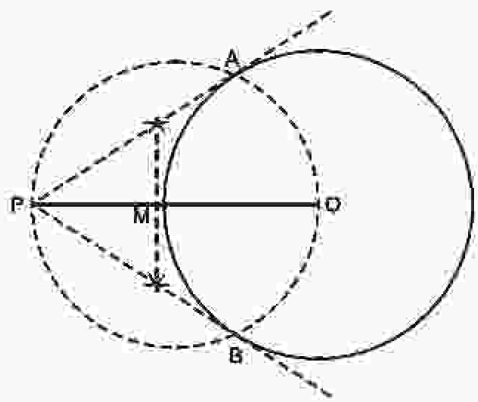
(iv) बिन्दु M को केन्द्र मानकर तथा MO या MP त्रिज्या लेकर वृत्त पर एक चाप लगाया, जो वृत्त को बिन्दु A पर काटता है।

(v) रेखाखंड PA खींचा।

इस प्रकार, रेखाखंड PA ही बिन्दु P से वृत्त की अभीष्ट स्पर्श रेखाएँ हैं।

8. 4 सेमी त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए। वृत्त के केन्द्र से 8 सेमी की दूरी पर स्थित एक बिन्दु से वृत्त पर स्पर्श रेखाएँ खींचिए, स्पर्श रेखाओं की लम्बाई नापकर लिखिए।

हल– **ज्ञात है—** एक वृत्त जिसका केन्द्र O तथा त्रिज्या 4 सेमी है। वृत्त के केन्द्र से 8 सेमी दूरी पर बिन्दु P स्थित है।



रचना करनी है— बिन्दु P से वृत्त की दो स्पर्शियाँ PA तथा PB की।

रचना के चरण—

(i) बिन्दु O को केन्द्र मानकर तथा 4 सेमी त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचा।

(ii) $OP = 8$ सेमी खींचा।

(iii) रेखाखंड OP का समद्विभाजक कर बिन्दु M ज्ञात किया।

(iv) बिन्दु M को केन्द्र मानकर तथा OM या PM त्रिज्या लेकर दूसरा वृत्त खींचा, जो पहले वृत्त को बिन्दु A व B पर काटता है।

(v) रेखाखंड PA तथा PB खींचे।

इस प्रकार प्राप्त रेखाखंड PA तथा PB दिए गए वृत्त की बिन्दु P से अभीष्ट स्पर्श रेखाएँ हैं। प्रत्येक स्पर्श रेखा की लम्बाई नापने पर 6.8 सेमी प्राप्त होती है।

9. दो वृत्त जिनकी त्रिज्याएँ 3.2 सेमी तथा 1.5 सेमी हैं और जिनके केन्द्रों के बीच की दूरी 6.2 सेमी है, की उभयनिष्ठ अनुस्पर्श रेखाएँ खींचिए। इन स्पर्श रेखाओं की माप बताइए। गणना द्वारा उत्तर की जाँच कीजिए।

[**संकेत** — गणना का सूत्र = अनुस्पर्श रेखाओं की लंबाई

$= \sqrt{(\text{केन्द्रों के बीच की दूरी})^2 - (\text{त्रिज्याओं का अन्तर})^2}$]

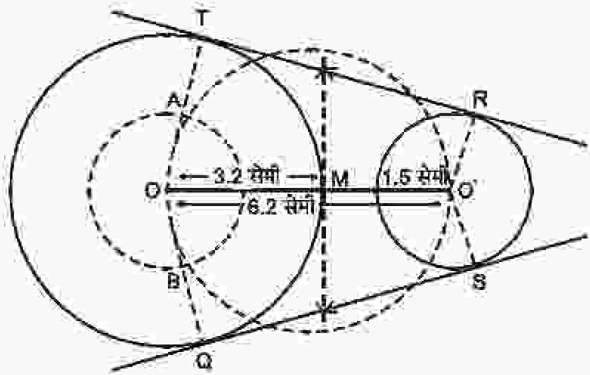
हल— **दिया है**— दो वृत्तों के केन्द्र की दूरी $OO' = 6.2$ सेमी तथा O केन्द्र वाले वृत्त की त्रिज्या 3.2 सेमी तथा O' केन्द्र वाले वृत्त की त्रिज्या 1.5 सेमी

रचना करनी है— वृत्तों की उभयनिष्ठ अनुस्पर्श रेखाएँ।

रचना के चरण—

(i) सर्वप्रथम रेखाखंड $OO' = 6.2$ सेमी खींचा।

(ii) बिन्दु O को केन्द्र मानकर 3.2 सेमी त्रिज्या तथा बिन्दु O' को केन्द्र मानकर 1.5 सेमी त्रिज्या के वृत्त खींचे।



(iii) रेखाखंड OO' का समद्विभाजक कर बिन्दु M प्राप्त किया।

(iv) बिन्दु M को केन्द्र मानकर तथा MO या MO' त्रिज्या लेकर वृत्त खींचा।

(v) बड़े वृत्त के केन्द्र O को केन्द्र मानकर दोनों वृत्तों की त्रिज्याओं के अन्तर अर्थात् $(3.2 - 1.5) = 1.7$ सेमी त्रिज्या लेकर वृत्त खींचा, जो OO' व्यास वाले वृत्त को बिन्दु A तथा B पर काटता है।

(vi) रेखाखंड OA तथा OB को मिलाकर आगे बढ़ाए, जो बड़े वृत्त को बिन्दु T और Q पर काटते हैं।

(vii) छोटे वृत्त के केन्द्र O' से OT व OQ के समान्तर रेखाएँ खींची, जो छोटे वृत्त के बिन्दुओं S व R पर मिलती हैं।

(viii) TR तथा QS को मिलाया।

इस प्रकार, प्राप्त TR व QS रेखाएँ दिए गए वृत्तों की अभीष्ट अनुस्पर्श रेखाएँ हैं। नापने पर $TR = QS = 6$ सेमी (लगभग)

गणना— अनुस्पर्श रेखाओं की लम्बाई

$= \sqrt{(\text{केन्द्रों के बीच की दूरी})^2 - (\text{त्रिज्याओं का अन्तर})^2}$

$= \sqrt{(OO')^2 - (3.2 - 1.5)^2} = \sqrt{(6.2)^2 - (1.7)^2} = \sqrt{38.44 - 2.89} = \sqrt{35.55}$

$= 5.96$ सेमी $= 6$ सेमी लगभग

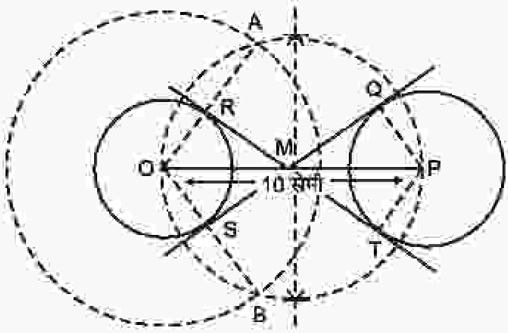
10. दो वृत्तों के केन्द्रों के बीच की दूरी 10 सेमी है, जिनकी त्रिज्या क्रमश: 4.5 सेमी व 3.5 सेमी हैं। वृत्तों की उभयनिष्ठ तिर्यक स्पर्श रेखाएँ खींचिए। स्पर्श रेखाओं की लम्बाई नापकर लिखिए तथा गणना द्वारा उत्तर की जाँच कीजिए।

[**संकेत** — गणना का सूत्र = तिर्यक स्पर्श रेखाओं की लंबाई

$= \sqrt{(\text{केन्द्रों के बीच की दूरी})^2 - (\text{त्रिज्याओं का योग})^2}$]

हल— **ज्ञात है**— दो वृत्तों के बीच की दूरी तथा उनकी त्रिज्याएँ।

रचना करनी है— दिए हुए वृत्तों की उभयनिष्ठ तिर्यक रेखाएँ।



रचना के चरण—

(i) रेखाखंड $OP = 10$ सेमी खींचा।

(ii) बिन्दु O को केन्द्र मानकर 3.5 सेमी त्रिज्या का वृत्त खींचा।

(iii) बिन्दु P को केन्द्र मानकर 4.5 सेमी त्रिज्या का दूसरा वृत्त खींचा।

(iv) रेखाखंड OP का समद्विभाजक कर बिन्दु M ज्ञात किया।

(v) बिन्दु M को केन्द्र मानकर तथा MO या MP त्रिज्या लेकर एक अन्य वृत्त खींचा।

(vi) छोटे वृत्त के केन्द्र O को केन्द्र मानकर तथा दोनों वृत्तों की त्रिज्याओं के योग अर्थात् $4.5 + 3.5 = 8.0$ सेमी के बराबर त्रिज्या लेकर चौथा वृत्त खींचा, जो M केन्द्र वाले वृत्त को A और B पर काटता है।

(vii) OA तथा OB को मिलाया जो छोटे वृत्त को क्रमश: R व S पर काटते हैं।

(viii) OA तथा OB के समान्तर बिन्दु P से क्रमश: PT तथा PQ रेखाखंड खींचे।

(ix) RT और SQ को मिलाया। इस प्रकार प्राप्त रेखाएँ RT व SQ ही दिए हुए वृत्तों की उभयनिष्ठ तिर्यक स्पर्श रेखाएँ हैं। मापने पर तिर्यक स्पर्श रेखाओं की लम्बाई 6 सेमी प्राप्त होती है।

उत्तर की जाँच—

ज्ञात है—

तिर्यक स्पर्श रेखाओं की लंबाई $= \sqrt{(\text{केन्द्रों के बीच की दूरी})^2 - (\text{त्रिज्याओं का योग})^2}$

$= \sqrt{(10)^2 - (8)^2} = \sqrt{100 - 64} = \sqrt{36} = 6$ सेमी

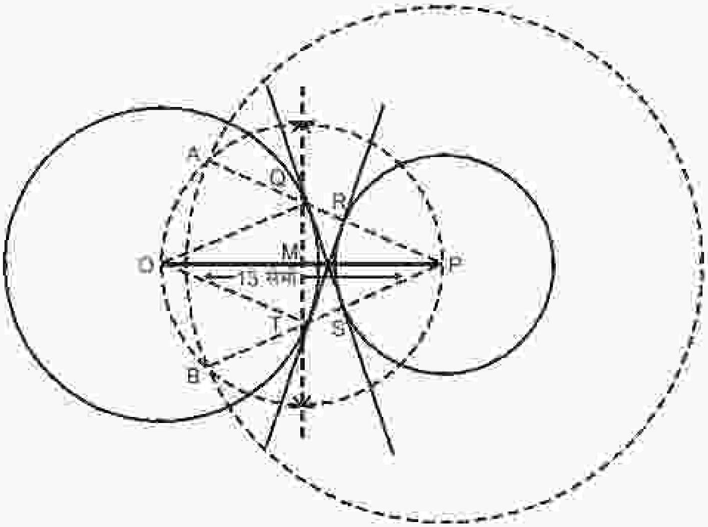
11. 7 सेमी तथा 5 सेमी त्रिज्या के दो वृत्तों के केन्द्रों के बीच की दूरी 13 सेमी है। इनकी उभयनिष्ठ तिर्यक स्पर्श रेखाएँ खींचिए।

हल— **ज्ञात है**— दो वृत्तों के केन्द्रों के बीच की दूरी $OP = 13$ सेमी तथा केन्द्र O वाले वृत्त की त्रिज्या 7 सेमी तथा P केन्द्र वाले वृत्त की त्रिज्या = 5 सेमी।

रचना करनी है— दिए हुए वृत्तों की उभयनिष्ठ तिर्यक स्पर्श रेखाओं की।

रचना के चरण—

(i) सर्वप्रथम रेखाखंड $OP = 13$ सेमी खींचा।



(ii) बिन्दु O को केन्द्र मानकर तथा 7 सेमी त्रिज्या लेकर वृत्त खींचा।

(iii) बिन्दु P को केन्द्र मानकर तथा 5 सेमी त्रिज्या लेकर दूसरा वृत्त खींचा।

(iv) रेखाखंड OP का समद्विभाजक कर बिन्दु M ज्ञात किया।

(v) बिन्दु M को केन्द्र मानकर तथा MO या MP त्रिज्या लेकर तीसरा वृत्त खींचा।

(vi) छोटे वृत्त के केन्द्र P को केन्द्र मानकर तथा दोनों वृत्तों की त्रिज्या के योग ($7+5=12$ सेमी) के बराबर त्रिज्या लेकर चौथा वृत्त खींचा, जो M केन्द्र वाले वृत्त को बिन्दु A व B पर काटता है।

(vii) रेखाखंड PA तथा PB को मिलाया, जो छोटे वृत्त को क्रमशः बिन्दु R व S पर काटते हैं।

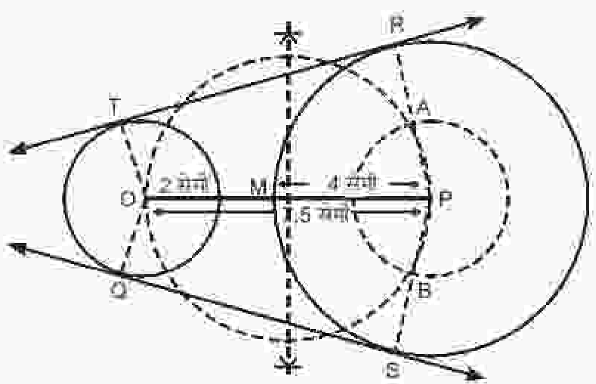
(viii) रेखाखंड $OT \parallel PA$ तथा $OQ \parallel PB$ खींचे।

(ix) RT व SQ को मिलाया। इस प्रकार प्राप्त रेखाएँ RT व SQ दिए गए वृत्तों की उभयनिष्ठ तिर्यक स्पर्श रेखाएँ हैं।

12. 2 सेमी तथा 4 सेमी त्रिज्या के दो वृत्तों के बीच की दूरी 7.5 सेमी है। वृत्तों की उभयनिष्ठ अनुस्पर्श रेखाओं की रचना कीजिए। इनकी लंबाई की माप लिखिए तथा गणना द्वारा उत्तर की जाँच कीजिए।

हल–ज्ञात है— दो वृत्तों के केन्द्रों के बीच की दूरी $OP = 7.5$ सेमी। वृत्तों की त्रिज्या 2 सेमी तथा 4 सेमी है।

रचना करनी है— दिए गए वृत्तों की उभयनिष्ठ अनुस्पर्श स्पर्श रेखाएँ।



रचना के चरण—

(i) सर्वप्रथम रेखाखंड $OP = 7.5$ सेमी खींचा।

(ii) बिन्दु O को केन्द्र मानकर तथा 2 सेमी त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचा।

(iii) बिन्दु P को केन्द्र मानकर तथा 4 सेमी त्रिज्या लेकर दूसरा वृत्त खींचा।

(iv) रेखाखंड OP का समद्विभाजक कर बिन्दु M ज्ञात किया।

(v) बिन्दु M को केन्द्र मानकर तथा MO या MP त्रिज्या लेकर तीसरा वृत्त खींचा।

(vi) बड़े वृत्त के केन्द्र P को केन्द्र मानकर तथा दोनों वृत्तों की त्रिज्याओं के अन्तर $(4-2=2$ सेमी) के बराबर त्रिज्या लेकर चौथा वृत्त खींचा, जो M केन्द्र वाले वृत्त को A तथा B बिन्दुओं पर काटता है।

(vii) रेखाखंड PA तथा PB को मिलाकर आगे बढ़ाया, जो बड़े वृत्त को क्रमश: R व S पर काटता है।

(viii) छोटे वृत्त के केन्द्र O से रेखाएँ $OT || PR$ तथा $OQ || PS$ खींची। जो छोटे वृत्त के क्रमश: बिन्दुओं T व Q पर मिलती हैं।

(ix) रेखाखंड TR तथा QS खींची इस प्रकार प्राप्त रेखाएँ TR व QS दिए गए वृत्तों की उभयनिष्ठ अनुस्पर्श रेखाएँ हैं। इनकी लम्बाई मापने पर 7.23 सेमी प्राप्त होती है।

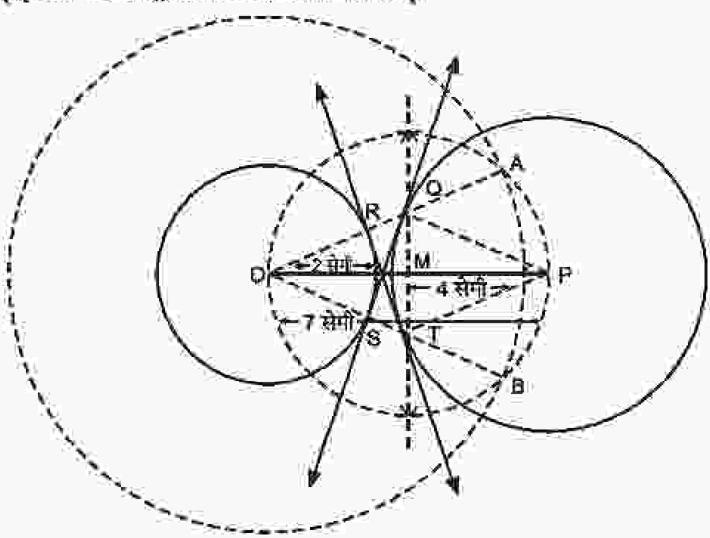
उत्तर की जाँच—

हम जानते हैं, कि

$$\text{अनुस्पर्श रेखाओं की लंबाई} = \sqrt{(\text{केन्द्रों के बीच की दूरी})^2 - (\text{त्रिज्याओं का अन्तर})^2}$$

$$= \sqrt{(7.5)^2 - (2)^2} = \sqrt{56.25 - 4} = \sqrt{52.25} = 7.23 \text{ सेमी}$$

13. दो वृत्तों की त्रिज्याएँ 2.0 सेमी और 4.0 सेमी हैं और केन्द्रों के बीच की दूरी 7 सेमी है। इन वृत्तों पर उभयनिष्ठ तिर्यक (अनुप्रस्थ) स्पर्श रेखाएँ खींचिए। इनकी लंबाई नापकर बताइए और गणना द्वारा उत्तर की जाँच कीजिए।



हल– ज्ञात है— 2.0 सेमी तथा 4.0 सेमी त्रिज्या वाले दो वृत्त जिसके केन्द्र O व P है जबकि $OP = 7$ सेमी

रचना करनी है— दिए गए वृत्तों की उभयनिष्ठ तिर्यक (अनुप्रस्थ) स्पर्श रेखाओं की।

रचना के चरण—

(i) सर्वप्रथम रेखाखंड $OP = 7$ सेमी खींचा।

(ii) बिन्दु O को केन्द्र मानकर तथा 2.0 सेमी त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचा।

(iii) बिन्दु P को केन्द्र मानकर तथा 4.0 सेमी त्रिज्या लेकर दूसरा वृत्त खींचा।

(iv) रेखाखंड OP का समद्विभाजक कर बिन्दु M ज्ञात किया।

(v) बिन्दु M को केन्द्र मानकर तथा MO या MP त्रिज्या लेकर तीसरा वृत्त खींचा।

(vi) छोटे वृत्त के केन्द्र O को केन्द्र मानकर तथा दोनों वृत्तों की त्रिज्याओं के योग $(2+4=6$ सेमी) के बराबर त्रिज्या लेकर चौथा वृत्त खींचा, जो M केन्द्र वाले वृत्त को बिन्दु A और B पर काटता है।

(vii) रेखाखंड OA तथा OB को मिलाया, जो छोटे वृत्त को क्रमशः बिन्दु R व S पर काटते हैं।

(viii) बड़े वृत्त के केन्द्र P से होकर जाने वाले रेखाखंड $PQ || OB$ तथा $PT || OA$ खींचे, जो बड़े वृत्त के बिन्दु Q तथा T पर मिलते हैं।

(ix) बिन्दु R व T तथा Q व S को मिलाया। इस प्रकार प्राप्त रेखाएँ RT व QS दिए गये वृत्तों की उभयनिष्ठ तिर्यक स्पर्श रेखाएँ हैं। इनकी लम्बाई मापने पर 3.6 सेमी प्राप्त होती है।

उत्तर की जाँच—

हम जानते हैं, कि

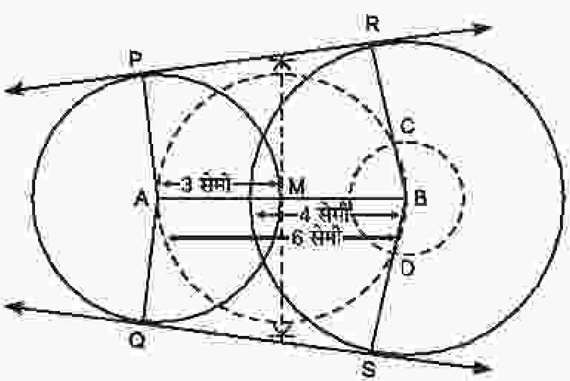
तिर्यक (अनुप्रस्थ) स्पर्श रेखाओं की लंबाई

$$= \sqrt{(\text{वृत्तों के केन्द्रों के बीच की दूरी})^2 - (\text{त्रिज्याओं का योग})^2}$$

$$= \sqrt{(7)^2 - (6)^2} = \sqrt{49-36} = \sqrt{13} = 3.6 \text{ सेमी}$$

14. 3 सेमी तथा 4 सेमी त्रिज्या के दो वृत्तों के केन्द्र एक-दूसरे से 6 सेमी दूरी पर हैं। इन दोनों वृत्तों पर उभयनिष्ठ अनुस्पर्श रेखाएँ खींचिए और उनकी माप लिखिए।

हल–ज्ञात है— 3 सेमी तथा 4 सेमी त्रिज्या वाले दो वृत्त जिनके केन्द्र A तथा B हैं। जबकि $AB = 6$ सेमी



रचना करनी है— दिए गए वृत्तों की उभयनिष्ठ अनुस्पर्श रेखाओं की।

रचना के चरण—

(i) सर्वप्रथम रेखाखंड $AB = 6$ सेमी खींचो।

(ii) बिन्दु A को केन्द्र मानकर 3 सेमी त्रिज्या का वृत्त खींचा।

(iii) बिन्दु B को केन्द्र मानकर 4 सेमी त्रिज्या का दूसरा वृत्त खींचा।

(iv) रेखाखंड AB का समद्विभाजक कर बिन्दु M प्राप्त किया।

(v) बिन्दु M को केन्द्र मानकर MA या MB त्रिज्या लेकर तीसरा वृत्त खींचा।

(vi) बड़े वृत्त के केन्द्र B को केन्द्र मानकर दोनों वृत्तों की त्रिज्याओं के अन्तर $(4-3=1$ सेमी) के बराबर त्रिज्या का चौथा वृत्त खींचा जो M केन्द्र वाले वृत्त को C व D पर काटता है।

(vii) रेखाखंड BC व BD को मिलाकर आगे बढ़ाया, जो बड़े वृत्त को क्रमश: R व S पर काटते हैं।

(viii) छोटे वृत्त के केन्द्र A से होकर जाने वाली रेखाएँ $AP||BR$ तथा $AQ||BS$ खींची।

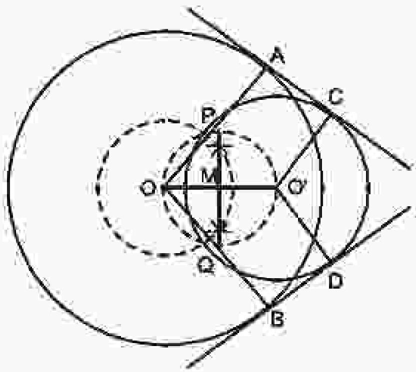
(ix) PR तथा QS को मिलाया।

(x) इस प्रकार प्राप्त रेखाएँ PR तथा QS दिए गए वृत्तों की उभयनिष्ठ अनुस्पर्श रेखाएँ हैं। मापने पर इन अनुस्पर्श रेखाओं की लंबाई सेमी 5.9 प्राप्त होती है।

15. दो वृत्तों की त्रिज्याएँ 7.0 सेमी और 4.0 सेमी हैं और उनके केन्द्रों के बीच की दूरी 5.0 सेमी है। उनकी उभयनिष्ठ अनुस्पर्श रेखाएँ खींचिए। उनकी लंबाई ज्ञात कीजिए।

हल– ज्ञात है— 7 सेमी तथा 4 सेमी त्रिज्या वाले दो वृत्त जिनके केन्द्र O तथा O' हैं। जबकि $OO' = 5$ सेमी,

रचना करनी है— दिए गए वृत्तों की उभयनिष्ठ अनुस्पर्श रेखाएँ।



रचना के चरण—

(i) सर्वप्रथम रेखाखंड $OO' = 5$ सेमी खींचा।

(ii) बिन्दु O को केन्द्र मानकर 7 सेमी त्रिज्या का एक वृत्त खींचा।

(iii) O' को केन्द्र मानकर 4 सेमी त्रिज्या का दूसरा वृत्त खींचा।

(iv) OO' का समद्विभाजक कर बिन्दु M ज्ञात किया।

(v) बिन्दु M को केन्द्र मानकर तथा MO या MO' त्रिज्या लेकर तीसरा वृत्त खींचा।

(vi) बड़े वृत्त के केन्द्र O को केन्द्र मानकर दोनों वृत्तों की त्रिज्याओं के अन्तर $(7-4=3$ सेमी) के बराबर त्रिज्या लेकर चौथा वृत्त खींचा, जो M केन्द्र वाले वृत्त को बिन्दु P व Q पर काटता है।

(vii) रेखाखंड OP तथा OQ को मिलाकर आगे बढ़ाया, जो बड़े वृत्त को क्रमश: A तथा B पर काटता है।

(viii) छोटे वृत्त के केन्द्र O' से होकर जाने वाले रेखाखंड $O'C||OA$ तथा $O'D||OB$ खींचे।

(ix) AC व BD को मिलाया। इस प्रकार प्राप्त रेखाएँ AC व BD दिए गए वृत्त की उभयनिष्ठ अनुस्पर्श रेखाएँ। इनकी लम्बाई मापने पर 4 सेमी प्राप्त होती है।

16. 1.5 सेमी और 2.1 सेमी की त्रिज्याओं वाले दो वृत्तों पर जिनके केन्द्रों के बीच का अन्तर 3.6 सेमी है। सभी उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाएँ खींचिए। उभयनिष्ठ अनुस्पर्श रेखाओं की लंबाइयों का परिकलन कीजिए और इन्हें मापिए।

हल– ज्ञात है— दो वृत्त, जिनकी त्रिज्याएँ 1.5 सेमी तथा 2.1 सेमी हैं। वृत्तों के केन्द्र O तथा O' हैं जहाँ $OO' = 3.6$ सेमी,

रचना करनी है— दिए गए वृत्तों की उभयनिष्ठ अनुस्पर्श रेखाओं की।

रचना के चरण—

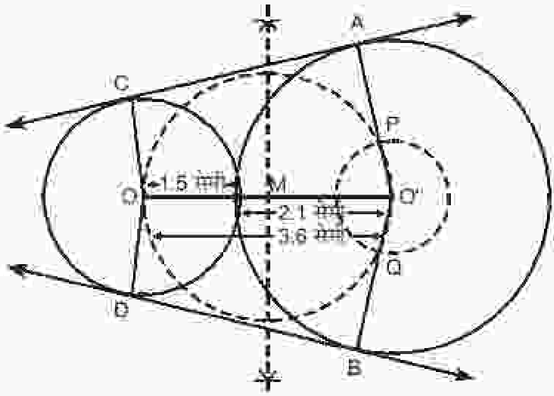
(i) सर्वप्रथम रेखाखंड $OO' = 3.6$ सेमी खींचा।

(ii) बिन्दु O को केन्द्र मानकर तथा 1.5 सेमी त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचा।

(iii) बिन्दु O' को केन्द्र मानकर 2.1 सेमी त्रिज्या का दूसरा वृत्त खींचा।

(iv) रेखाखंड OO' का समद्विभाजक कर बिन्दु M ज्ञात किया।

(v) बिन्दु M को केन्द्र मानकर तथा $MO = MO'$ त्रिज्या लेकर तीसरा वृत्त खींचा।



(vi) बड़े वृत्त के केन्द्र O' को केन्द्र मानकर तथा दोनों वृत्तों की त्रिज्याओं के अन्तर$(2.1 - 1.5 = 1.6$ सेमी) बराबर त्रिज्या लेकर चौथा वृत्त खींचा, जो M केन्द्र वाले वृत्त को बिन्दु P व Q पर काटता है।

(vii) रेखाखंड $O'P$ व $O'Q$ को मिलाकर आगे बढ़ाया जो बड़े वृत्त को क्रमशः बिन्दु A व B पर काटते हैं।

(viii) छोटे वृत्त के केन्द्र O से होकर जाने वाले रेखाखंड $OC \| O'A$ तथा $OD \| O'B$ खींचे, जो छोटे वृत्त को बिन्दु C व D पर मिलते हैं।

(ix) CA एवं DB को मिलाया। इस प्रकार प्राप्त रेखाएँ CA तथा DB दिए गए वृत्तों की उभयनिष्ठ अनुस्पर्श रेखाएँ हैं। जो मापने पर 3.54 सेमी प्राप्त होती हैं।

अनुस्पर्श रेखाओं की लंबाइयों का परिकलन—

हम जानते हैं, कि

अनुस्पर्श रेखाओं की लंबाई

$$= \sqrt{(\text{वृत्तों के केन्द्रों के बीच की दूरी})^2 - (\text{त्रिज्याओं का अन्तर})^2}$$

$$= \sqrt{(3.6)^2 - (0.6)^2} = \sqrt{12.96 - 0.36} = \sqrt{12.60} = 3.54 \text{ सेमी}$$

17. तीन वृत्त एक-दूसरे को बाह्यतः स्पर्श करते हैं। उनके केन्द्रों के बीच की दूरी 4 सेमी, 5 सेमी तथा 7 सेमी हैं, वृत्तों की रचना कीजिए और त्रिज्या बताइए।

हल– ज्ञात है— तीन वृत्त जिनके केन्द्र A, B तथा C हैं, वृत्त एक-दूसरे को बाह्यतः स्पर्श करते हैं। वृत्तों के केन्द्रों के बीच की दूरी $AB = 4$ सेमी, $BC = 5$ सेमी तथा $CA = 7$ सेमी।

रचना करनी है— केन्द्र A, B तथा C वाले वृत्त जो परस्पर बाह्यतः स्पर्श करते हैं।

विश्लेषण—

माना A केन्द्र वाले वृत्त की त्रिज्या $= r_1$ सेमी

B केन्द्र वाले वृत्त की त्रिज्या $= r_2$ सेमी

तथा C केन्द्र वाले वृत्त की त्रिज्या $= r_3$ सेमी

$\because$ वृत्त एक-दूसरे को बाह्यतः स्पर्श करते हैं।

$\therefore$ वृत्तों के बीच की दूरी = वृत्तों की त्रिज्या का योगफल

तब $AB = r_1 + r_2 = 4$ सेमी ......(1)

$BC = r_2 + r_3 = 5$ सेमी ......(2)

तथा $CA = r_3 + r_1 = 7$ सेमी ......(3)

समीकरण (1), (2) व (3) को जोड़ने पर,

$2(r_1 + r_2 + r_3) = 16$

या $r_1 + r_2 + r_3 = 8$ ......(4)

समीकरण (4) में से समीकरण (1), (2) व (3) घटाने पर क्रमशः

$r_3 = 4, r_1 = 3, r_2 = 1$

अतः केन्द्र A वाले वृत्त की त्रिज्या = 3 सेमी

केन्द्र B वाले वृत्त की त्रिज्या = 1 सेमी

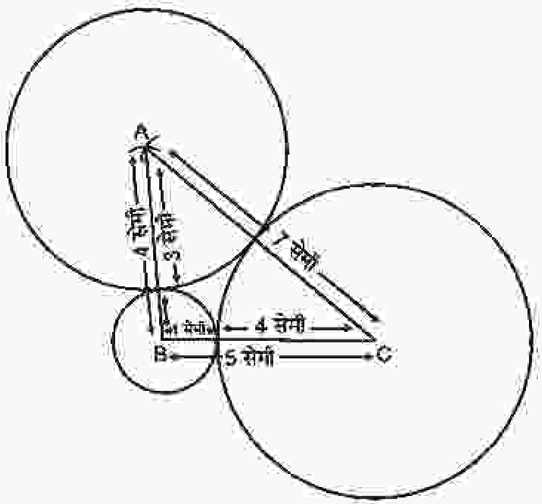
तथा केन्द्र C वाले वृत्त की त्रिज्या = 4 सेमी

रचना के चरण—

(i) सर्वप्रथम रेखाखंड $BC = 5$ सेमी खींचा।

(ii) बिन्दु B को केन्द्र मानकर तथा 4 सेमी त्रिज्या लेकर एक चाप लगाया।

(iii) बिन्दु C को केन्द्र मानकर तथा 7 सेमी त्रिज्या लेकर दूसरा चाप लगाया। जो पहले चाप को बिन्दु A पर काटता है। AB और AC को मिलाया।



(iv) बिन्दु A को केन्द्र मानकर 3 सेमी का पहला वृत्त बिन्दु B को केन्द्र मानकर 1 सेमी त्रिज्या का दूसरा वृत्त तथा बिन्दु C को केन्द्र मानकर 4 सेमी त्रिज्या का तीसरा वृत्त खींचा। इस प्रकार प्राप्त वृत्त एक-दूसरे को बाह्यतः स्पर्श करते हैं। ये वृत्त ही दिए गए अभीष्ट वृत्त हैं।

18. दो वृत्तों की त्रिज्याएँ 4.5 सेमी तथा 3.5 सेमी हैं। वृत्तों के केन्द्रों के बीच की दूरी 10 सेमी है। वृत्तों की उभयनिष्ठ तिर्यक स्पर्श रेखाएँ खींचिए।

हल—**ज्ञात है**— केन्द्र O तथा O' वाले दो वृत्त जिनकी त्रिज्याएँ 4.5 सेमी तथा 3.5 सेमी है। जबकि $OO' = 10$ सेमी।

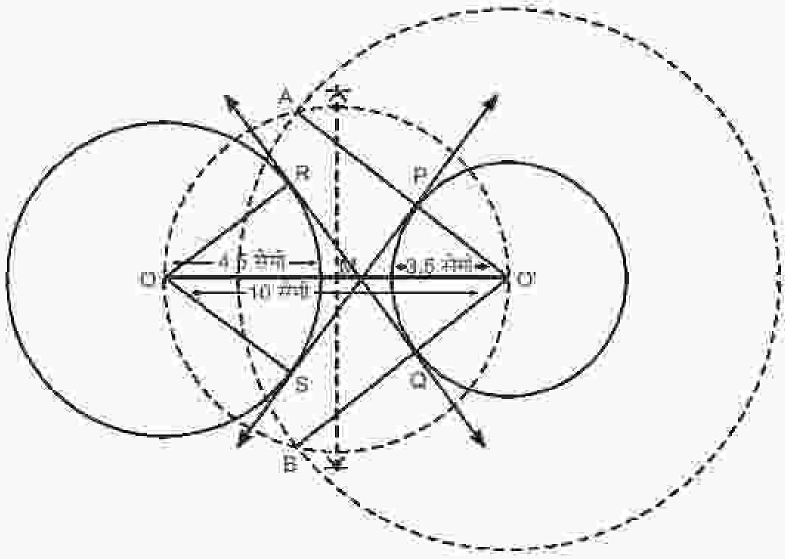
रचना करनी है— दिए गए वृत्तों की उभयनिष्ठ तिर्यक स्पर्श रेखाओं की।

रचना के चरण—

(i) सर्वप्रथम $OO' = 10$ सेमी रेखाखंड खींचा।

(ii) बिन्दु O को केन्द्र मानकर 4.5 सेमी का एक वृत्त खींचा।

(iii) O' को केन्द्र मानकर 3.5 सेमी त्रिज्या का दूसरा वृत्त खींचा।



(iv) OO' का समद्विभाजक कर बिन्दु M ज्ञात किया।

(v) बिन्दु M को केन्द्र मानकर $MO = MO'$ त्रिज्या का तीसरा वृत्त खींचा।

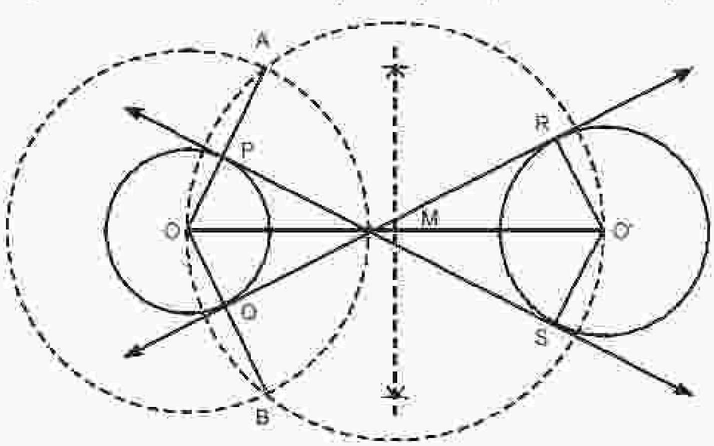
(vi) छोटे वृत्त के केन्द्र O' को केन्द्र मानकर दो वृत्तों की त्रिज्याओं के योग $(4.5 + 3.5 = 8$ सेमी) के बराबर त्रिज्या का वृत्त खींचा, जो M केन्द्र वाले वृत्त बिन्दु A तथा B पर काटता है।

(vii) $O'A$ तथा $O'B$ को मिलाया जो छोटे वृत्त को क्रमशः P तथा Q पर काटते हैं।

(viii) बड़े वृत्त के केन्द्र O से होकर जाने वाले रेखाखण्ड $OS \| O'A$ तथा $OR \| O'B$ खींचे, जो बड़े वृत्त को बिन्दु S तथा R पर मिलते हैं।

(ix) RQ तथा PS को मिलाया। इस प्रकार प्राप्त रेखाएँ RQ तथा PS दिए गए वृत्तों की अभीष्ट उभयनिष्ठ तिर्यक स्पर्श रेखाएँ हैं।

19. दो वृत्तों की त्रिज्याएँ 2 सेमी तथा 2.5 सेमी हैं। वृत्तों के केन्द्रों के बीच की दूरी 10 सेमी है। इन वृत्तों की उभयनिष्ठ तिर्यक रेखाएँ खींचिए। और इनकी माप लिखिए।



हल– ज्ञात है— दो वृत्त जिनके केन्द्र O तथा O' हैं। वृत्तों की त्रिज्याएँ 2 सेमी व 2.5 सेमी हैं, जबकि $OO' = 10$ सेमी।

रचना करनी है— दिए गए वृत्तों की उभयनिष्ठ तिर्यक स्पर्श रेखाओं की।

रचना के चरण— प्रश्न संख्या 18 की भाँति स्वयं लिखिए।

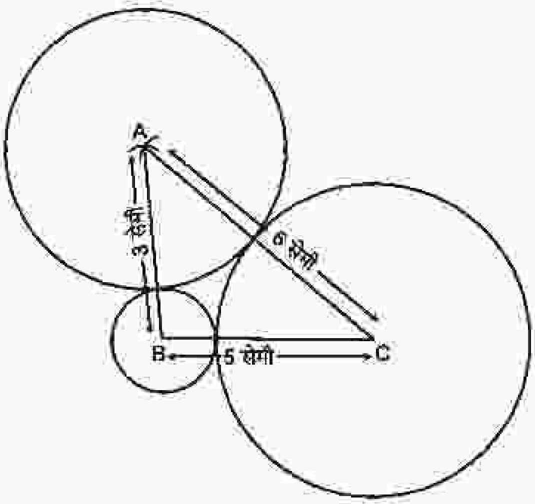
मापने पर उभयनिष्ठ तिर्यक स्पर्श रेखाओं की लम्बाई = 8.93 सेमी प्राप्त होती है।

20. तीन बिन्दु A, B तथा C क्रमशः $AB = 3$ सेमी, $BC = 5$ सेमी तथा $AC = 6$ सेमी की दूरी पर हैं। इनको केन्द्र मानकर ऐसे वृत्तों की रचना कीजिए जो अन्य दो को बाह्य स्पर्श करें।

हल– ज्ञात है— तीन बिन्दु A, B व C इस प्रकार हैं $AB = 3$ सेमी, $BC = 5$ सेमी, तथा $AC = 6$ सेमी।

रचना करनी है— बिन्दु A, B व C को केन्द्र लेकर ऐसे वृत्तों की, जो एक-दूसरे को बाह्यतः स्पर्श करते हैं।

विश्लेषण— माना केन्द्र A, B तथा C केन्द्र वाले वृत्तों की त्रिज्याएँ क्रमशः r_1, r_2 व r_3 हैं।



$\because$ वृत्त एक-दूसरे को बाह्य स्पर्श करते हैं।

$\therefore$ वृत्तों के केन्द्रों के बीच की दूरी = वृत्तों की त्रिज्याओं का योग

$AB = r_1 + r_2 = 3$ ......(1)

$BC = r_2 + r_3 = 5$ ......(2)

$CA = R_3 + R_1 = 6$ ......(3)

समीकरण (1), (2) व (3) को जोड़ने पर,

$2(r_1 + r_2 + r_3) = 14$

या $r_1 + r_2 + r_3 = 7$ ......(4)

समीकरण (4) में से क्रमशः समीकरण (2), (3) व (1) घटाने पर,

$r_1 = 2, r_2 = 1,$ व $r_3 = 4$ सेमी

रचना के चरण—

(i) सर्वप्रथम रेखाखंड $BC = 5$ सेमी खींचा।

(ii) बिन्दु B को केन्द्र मानकर तथा 3 सेमी त्रिज्या लेकर एक चाप लगाया।

(iii) बिन्दु C को केन्द्र मानकर तथा 6 सेमी त्रिज्या लेकर दूसरा चाप लगाया जो पहले चाप को बिन्दु A पर काटता है, AB व AC को मिलाया।

(iv) बिन्दु B को केन्द्र मानकर 1 सेमी त्रिज्या का वृत्त खींचा।

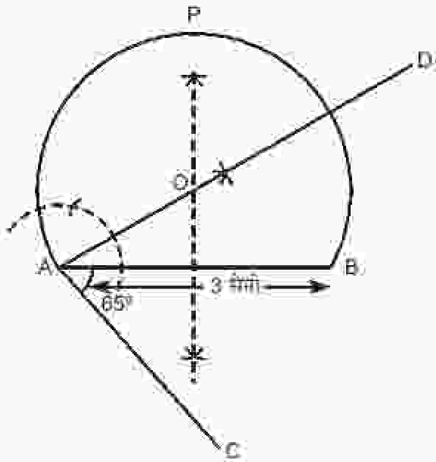
(v) बिन्दु C को केन्द्र मानकर 4 सेमी त्रिज्या का दूसरा वृत्त खींचा।

(vi) बिन्दु A को केन्द्र मानकर 2 सेमी त्रिज्या का तीसरा वृत्त खींचा।

इस प्रकार प्राप्त वृत्त एक-दूसरे को बाह्य: स्पर्श करते हैं। ये वृत्त ही अभीष्ट वृत्त हैं।

अभ्यास 13.3

1. 3 सेमी माप के एक रेखाखंड पर 65° कोण वाले वृत्तखंड की रचना कीजिए।



हल– **ज्ञात है**— 3 सेमी का एक रेखाखंड ($AB = 3$ सेमी)।

रचना करनी है— 65° के कोण के वृत्तखंड की।

रचना के चरण—

(i) सर्वप्रथम रेखाखंड $AB = 3$ सेमी खींचा।

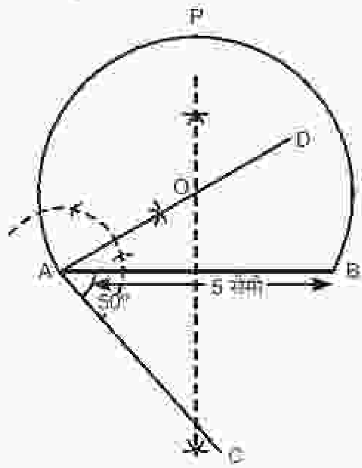
(ii) रेखाखंड AB के बिन्दु A पर $\angle BAC = 65°$ बनाया।

(iii) रेखाखंड AC के बिन्दु A पर 90° का कोण बनाती हुई रेखा AD खींची।

(iv) रेखाखंड AB का लम्बअर्द्धक किया, जो रेखा AD को बिन्दु O पर काटता है। बिन्दु O वृत्तखंड का केन्द्र है।

(v) O को केन्द्र मानकर तथा OA या OB त्रिज्या लेकर वृत्तखंड APB खींचा। इस प्रकार प्राप्त वृत्तखंड APB अभीष्ट वृत्तखंड है।

2. 5 सेमी के एक रेखाखंड पर 50° कोण के वृत्तखंड की रचना कीजिए।



हल– **ज्ञात है**— रेखाखंड $AB = 5$ सेमी।

रचना करनी है— रेखाखंड AB पर 50° कोण के वृत्तखंड की।

रचना के चरण—

(i) सर्वप्रथम रेखाखंड $AB = 5$ सेमी खींचा।

(ii) रेखाखंड के बिन्दु A पर $\angle BAC = 50°$ बनाया।

(iii) रेखाखंड AC के बिन्दु A पर 90° का कोण बनाती हुई रेखा AD खींची।

(iv) रेखाखंड AB का लम्बअर्द्धक खींचा, जो AD को बिन्दु O पर काटता है। बिन्दु O वृत्तखंड का केन्द्र है।

(v) बिन्दु O को केन्द्र मानकर तथा त्रिज्या OA या OB लेकर वृत्तखंड APB खींचा। इस प्रकार प्राप्त वृत्तखंड APB अभीष्ट वृत्तखंड है।

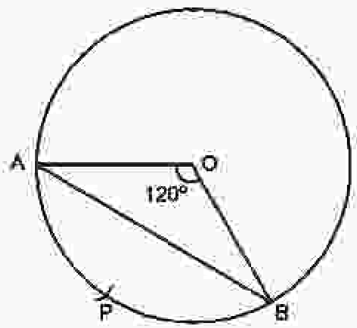
3. 4 सेमी लम्बाई के रेखाखंड पर 60° के कोण वाले वृत्तखंड की रचना कीजिए।

हल— प्रश्न संख्या 1 व 2 के हल की भाँति स्वंय कीजिए।

4. 5 सेमी त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए। वृत्त को ऐसे दो वृत्तखंडों में विभाजित कीजिए कि एक वृत्तखंड का कोण 60° तथा दूसरे वृत्तखंड का कोण 120° हो।

हल— **ज्ञात है**— त्रिज्या $OA = 5$ सेमी का एक वृत्त।

रचना करनी है— वृत्त को दो वृत्तखंडों में विभाजित करना है जिसमें एक वृत्तखंड का कोण 60° तथा दूसरे वृत्तखंड का कोण 120° हो।



रचना के चरण—

(i) रेखाखंड $OA = 5$ सेमी खींची।

(ii) बिन्दु O को केन्द्र मानकर तथा $OA = 5$ सेमी त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचा।

(iii) A को केन्द्र मानकर तथा OA त्रिज्या लेकर एक चाप लगाया जो वृत्त को बिन्दु P पर काटता है।

(iv) बिन्दु P को केन्द्र मानकर तथा OA त्रिज्या लेकर दूसरा चाप लगाया, जो वृत्त को बिन्दु B पर काटता है।

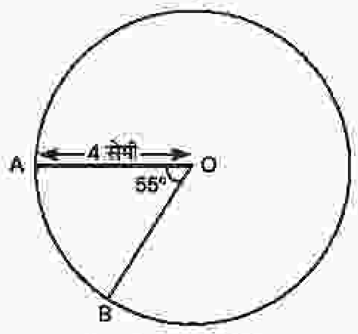
(v) रेखाखंड OB खींचा $\angle AOB = 120°$, वृत्तखंड के कोण 60° का दो गुणा।

(vi) रेखाखंड AB खींचा जो वृत्त को दो अभीष्ट वृत्तखंडों में बाँटेगा।

5. 4 सेमी त्रिज्या के वृत्त पर 55° कोण वाले वृत्तखंड की रचना कीजिए।

हल— **ज्ञात है**— $OA = 4$ सेमी त्रिज्या का एक वृत्त।

रचना करनी है— 55° कोण वाले वृत्तखंड की।



रचना के चरण—

(i) सर्वप्रथम रेखाखंड $OA = 4$ सेमी खींचा।

(ii) बिन्दु O को केन्द्र मानकर तथा OA त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचा।

(iii) बिन्दु O पर चाँदे की सहायता से 55° का कोण बनाती हुई रेखा OB खींची। इस प्रकार प्राप्त रचना ही अभीष्ट रचना है।

6. 4 सेमी लम्बाई वाले रेखाखंड पर 115° कोण वाले वृत्तखंड की रचना कीजिए।

हल— **ज्ञात है**— 4 सेमी लम्बाई का रेखाखंड AB।

रचना करनी है— रेखाखंड AB पर 115° कोण वाले वृत्तखंड की।

रचना के चरण—

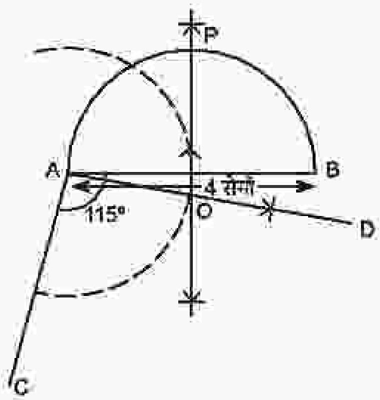
(i) सर्वप्रथम रेखाखंड $AB = 4$ सेमी खींचा।

(ii) रेखा AB के बिन्दु A पर $\angle BAC = 115°$ बनाया।

(iii) रेखाखंड AC के बिन्दु A पर 90° का कोण बनाती हुई रेखा AD खींची।

(iv) रेखाखंड AB का लम्बअर्द्धक खींचा, जो AD को बिन्दु O पर काटती है।

(v) बिन्दु O को केन्द्र मानकर तथा OA या OB त्रिज्या लेकर वृत्तखंड APB खींचा। इस प्रकार APB ही अभीष्ट वृत्तखंड है।



7. 7 सेमी त्रिज्या के एक वृत्त पर 65° कोण वाले एक वृत्तखंड की रचना कीजिए।

हल– प्रश्न संख्या 5 के हल की भाँति स्वयं कीजिए।

8. 4 सेमी लम्बाई के रेखाखंड पर 70° कोण वाले एक वृत्तखंड की रचना कीजिए।

हल– प्रश्न संख्या 6 के हल की भाँति स्वयं कीजिए।

बहुविकल्पीय प्रश्न

नोट–बहुविकल्पीय प्रश्नों के उत्तर जानने के लिए पाठ्य पुस्तक के पृष्ठ संख्या 264 व 265 का अवलोकन कीजिए।

इकाई-6 निर्देशांक ज्यामिति
(Co-ordinate Geometry)

14

सरल रेखा
(Straight Line)

अभ्यास 14.1

1. एक रेखा बिन्दु $(0, -4)$ से होकर जाती है और X-अक्ष के समान्तर है। रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल—दिया गया बिन्दु $\quad P(x, y) = (0, -4)$

अतः बिन्दु P से होकर जाने वाली तथा X-अक्ष के समान्तर रेखा का

समीकरण $\quad y = k \quad$ जहाँ $k =$ बिन्दु की कोटि $= -4$

$\therefore$ रेखा का अभीष्ट समीकरण $y = -4$ उत्तर

2. बिन्दुओं $(3, 4)$ व $(x, 5)$ से होकर जाने वाली रेखा X-अक्ष की धन दिशा से $135°$ का कोण बनाती है। x का मान ज्ञात कीजिए।

हल—दिया गया बिन्दु $P(x_1, y_1) = (3, 4)$

$Q(x_2, y_2) = (x, 5)$

तथा रेखा का X-अक्ष की धन दिश से कोण $(\theta) = 135°$

$$\text{रेखा की प्रवणता } (m) = \tan\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

या $$\tan 135° = \frac{5-4}{x-3}$$

$$\tan(90° + 45°) = \frac{-1}{x-3}$$

या $$-\tan 45° = \frac{-1}{x-3}$$

या $$-1 = \frac{1}{x-3}$$

या $$-x + 3 = 1$$

या $$x = 3 - 1$$

या $$x = 2$$ उत्तर

3. यदि बिन्दुओं $P(1, 5)$ तथा $Q(x, -7)$ को मिलाने वाली रेखा की प्रवणता 4 हो, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

हल—दिया गए बिन्दु $P(1, 5)$ तथा $Q(x, -7)$

तथा रेखा PQ की प्रवणता $m = 4$

यहाँ $P(x_1, y_1) = (1, 5)$ तथा $Q(x_2, y_2) = (x, -7)$

हम जानते हैं कि—

$$\text{रेखा की प्रवणता } (m) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

या $$4 = \frac{-7-5}{x-1}$$

या $$4 = \frac{-12}{x-1}$$

या $$4x - 4 = -12$$

या $$4x = -12 + 4$$

या $$4x = -8$$

या $$4x = \frac{-8}{4} = -2$$ उत्तर

4. X-अक्ष के समान्तर तथा बिन्दु (3, 4) से होकर जाने वाली रेखा की समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल—दिया गया बिन्दु $P(a, b) = (3, 4)$ यहाँ भुज = 3 तथा कोटि = 4

X-अक्ष के समान्तर तथा बिन्दु $P(a, b)$ से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण,

$$y = b$$

या $$y = 4$$

या $$y - 4 = 0$$ उत्तर

5. सिद्ध कीजिए कि बिन्दु $A(4, 8)$, $B(5, 12)$ व $C(9, 28)$ सरेख हैं।

हल—माना दिया गया बिन्दु $A(x_1, y_1) = (4, 8)$

$$B(x_2, y_2) = (5, 12)$$

तथा $$C(x_3, y_3) = (9, 28)$$

बिन्दु A व B से होकर जाने वाली रेखा की प्रवणता

$$(m_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{12-8}{5-4} = \frac{4}{1} = 4$$

बिन्दु B व C से होकर जाने वाली रेखा की प्रवणता

$$(m_2) = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{28-12}{9-5} = \frac{16}{4} = 4$$

रेखा AB की प्रवणता = रेखा BC की प्रवणता = 4

$\therefore$ **बिन्दु A, B व C तीनों एक रेखा पर स्थित हैं अर्थात् संरेख हैं।** **इति सिद्धम्**

6. निम्नलिखित प्रतिबन्धों के अनुसार रेखा की प्रवणता ज्ञात कीजिए।

(i) रेखा बिन्दुओं (–4, –5) व (8, 7) से होकर जाती है।

(ii) रेखा बिन्दुओं (3, 5) व (6, 8) से होकर जाती है।

हल—(i) माना बिन्दु $A(x_1, y_1) = (-4, -5)$

तथा $B(x_2, y_2) = (8, 7)$

अतः रेखा AB की प्रवणता $(m) = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{7-(-5)}{8-(-4)}$

$$= \frac{7+5}{8+4} = \frac{12}{12} = 1$$ उत्तर

(ii) माना बिन्दु $A(x_1, y_1) = (3, 5)$

तथा $B(x_2, y_2) = (6, 8)$

अतः बिन्दु A व B से होकर जाने वाली रेखा की प्रवणता

$$(m) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8-5}{8-3} = \frac{3}{3} = 1$$ उत्तर

7. बिन्दुओं (–2, 5) व (6, 4) से जाने वाली रेखा की प्रवणता ज्ञात कीजिए।

हल—माना दिए गए बिन्दु $A(x_1, y_1) = (-2, 5)$

तथा $B(x_2, y_2) = (6, 4)$

अतः बिन्दु A व B से होकर जाने वाली रेखा की प्रवणता

$$(m) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-5}{6-(-2)} = \frac{-1}{6+2} = -\frac{1}{8}$$

उत्तर

8. बिन्दुओं (3, –4) व (5, –7) से जाने वाली रेखा की प्रवणता ज्ञात कीजिए।

हल—माना दिए गए बिन्दु $A(x_1, y_1) = (3, -4)$

तथा $B(x_2, y_2) = (5, -7)$

अतः बिन्दु A व B से होकर जाने वाली रेखा की प्रवणता

$$(m) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-7-(-4)}{5-3} = \frac{-7+4}{2} = -\frac{3}{2}$$ उत्तर

9. यदि $P(1,0)$, $Q(0,1)$ तथा (–3,4) तो दिखाइए कि ये बिन्दु संरेख हैं।

हल—दिया गए बिन्दु, $P(x_1, y_1) = (1, 0)$,

$Q(x_2, y_2) = (0, 1)$

तथा $R(x_3, y_3) = (-3, 4)$

अतः रेखा PQ की प्रवणता $= \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{1-0}{0-1} = \dfrac{1}{-1} = -1$

तथा रेखा QR की प्रवणता $= \dfrac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \dfrac{4-1}{-3-0} = \dfrac{3}{-3} = -1$

रेखा PQ की प्रवणता = रेखा QR की प्रवणता

$\therefore$ बिन्दु P, Q तथा R संरेख हैं। इति सिद्धम्

10. X-अक्ष की धन दिशा से निम्नलिखित कोण बनाने वाली इन रेखाओं की प्रवणता ज्ञात कीजिए—

(i) 30° (ii) –45° (iii) 90° (iv) 300°

हल—(i) दिया है—

रेखा का X-अक्ष की धन दिशा से कोण $(\theta) = 30°$

अत: रेखा की प्रवणता $(m) = \tan\theta$

$= \tan 30°$

$= \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ उत्तर

(ii) दिया है—

रेखा का X-अक्ष की धन दिशा से कोण $(\theta) = 45°$

अत: रेखा की प्रवणता $(m) = \tan\theta$

$= \tan 30°$

$= \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ उत्तर

(ii) दिया है—

रेखा का X-अक्ष की धन दिशा से कोण $(\theta) = 45°$

अत: रेखा की प्रवणता $(m) = \tan\theta$ से,

$= \tan(-45°)$

$= -\tan 45°$

$= -1$ उत्तर

(iii) दिया है—

रेखा का X-अक्ष की धन दिशा से कोण $(\theta) = 90°$

अत: रेखा की प्रवणता $(m) = \tan\theta$

$m = \tan 90°$

या $m = \infty$ उत्तर

(iv) दिया है—

रेखा का X-अक्ष की धन दिशा से कोण $(\theta) = 300°$

अत: रेखा की प्रवणता $(m) = \tan\theta$ से,

या $m = \tan 300°$

$$= \tan(180^\circ + 120^\circ)$$

$$= \tan(120^\circ)$$

$$= \tan(90^\circ + 30^\circ)$$

$$= -\cot 30^\circ$$

$$= -\sqrt{3}$$ उत्तर

11. यदि बिन्दुओं (3, *x*) तथा (2, 7) से होकर जाने वाली रेखा की प्रवणता और बिन्दुओं (−1, 4) व (0, 6) से होकर जाने वाली रेखा की प्रवणता के बराबर हो, तो *x* का मान ज्ञात कीजिए।

हल—माना दिए गए बिन्दु $A(x_1, y_1) = (3, x)$, $B(x_2, y_2) = (2, 7)$

तथा $P(x_3, y_3) = (-1, 4)$, $Q(x_4, y_4) = (0, 6)$

प्रश्नानुसार,

रेखा AB की प्रवणता = रेखा PQ की प्रवणता

या $$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}$$

या $$\frac{7 - x}{2 - 3} = \frac{6 - 4}{0 - (-1)}$$

या $$\frac{7 - x}{-1} = \frac{2}{1}$$

या $$7 - x = -2 \Rightarrow x = 7 + 2 = 9$$ उत्तर

12. निम्नलिखित बिन्दुओं से होकर जाने वाली रेखाओं की प्रवणताएँ ज्ञात कीजिए—

(i) (−3, 2) व (3, 8) (ii) (−4, −5) व (8, 7) (iii) (4,6) व (2,5)

(iv) (2, 3) व (6, 5) (v) (3, 5) व (6, 8) (vi) (4, 3) व (−7, 6)

(vii) (6, 0) व (0, 6) (viii) (0, 1) व (1, 0) (ix) (3, 10) व (7, 6)

हल— (i) माना $A(x_1, y_1) = (-3, 2)$ $B(x_2, y_2) = (3, 8)$

$\therefore$ रेखा AB की प्रवणता $= \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{8 - 2}{3 - (-3)}$

$$= \frac{6}{3 + 3} = \frac{6}{6} = 1$$ उत्तर

(ii) माना $A(x_1, y_1) = (-4, -5)$ तथा $B(x_2, y_2) = (8, 7)$

$\therefore$ रेखा AB की प्रवणता $= \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{7 - (-5)}{8 - (-4)}$

$$= \frac{7 + 5}{8 + 4} = \frac{12}{12} = 1$$ उत्तर

(iii) माना $A(x_1, y_1) = (4, 6)$ तथा $B(x_2, y_2) = (2, 5)$

$\therefore$ रेखा AB की प्रवणता $= \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{5-6}{2-4}$

$= \dfrac{-1}{-2} = \dfrac{1}{2}$ उत्तर

(iv) माना $P(x_1, y_1) = (2, 3)$ तथा $Q(x_2, y_2) = (6, 5)$

$\therefore$ रेखा PQ की प्रवणता $= \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{5-3}{6-2}$

$= \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$ उत्तर

(v) माना बिन्दु $P(x_1, y_1) = (3, 5)$ तथा $Q(x_2, y_2) = (6, 8)$

$\therefore$ रेखा PQ की प्रवणता $= \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{8-5}{6-3}$

$= \dfrac{3}{3} = 1$ उत्तर

(vi) माना बिन्दु $A(x_1, y_1) = (4, 3)$ तथा $B(x_2, y_2) = (-7, 6)$

$\therefore$ रेखा AB की प्रवणता $= \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{6-3}{-7-4}$

$= \dfrac{3}{-11} = -\dfrac{3}{11}$ उत्तर

(vii) माना बिन्दु $A(x_1, y_1) = (6, 0)$ तथा $B(x_2, y_2) = (0, 6)$

$\therefore$ रेखा AB की प्रवणता $= \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{6-0}{0-6}$

$= \dfrac{6}{-6} = -1$ उत्तर

(viii) माना बिन्दु $P(x_1, y_1) = (0, 1)$ तथा $Q(x_2, y_2) = (1, 0)$

$\therefore$ रेखा PQ की प्रवणता $= \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{0-1}{1-0}$

$= \dfrac{-1}{1} = -1$ उत्तर

(ix) माना बिन्दु $P(x_1, y_1) = (3, 10)$ तथा $Q(x_2, y_2) = (7, 6)$

$\therefore$ रेखा PQ की प्रवणता $= \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{6-10}{7-3}$

$= \dfrac{-4}{4} = -1$ उत्तर

अभ्यास 14.2

1. निम्नलिखित प्रतिबन्धों के अनुसार रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए—

(i) Y-अक्ष पर अन्तःखण्ड $= 5$ इकाई, धन X-अक्ष से झुकाव $= 60°$

(ii) Y-अक्ष से काटा गया अन्तःखण्ड $= -7$ इकाई, धन X-अक्ष से झुकाव $= 120°$

(iii) Y-अक्ष से काटा गया अन्तःखण्ड $= 5$ इकाई, धन X-अक्ष से झुकाव $= 135°$

(iv) Y-अक्ष से काटा गया अन्तःखण्ड $= 7$ इकाई, धन X-अक्ष से झुकाव $= 60°$

(v) Y-अक्ष से काटा गया अन्तःखण्ड $= -4$ इकाई, धन X-अक्ष से झुकाव $= 60°$

(vi) Y-अक्ष से काटा गया अन्तःखण्ड $= 4$ इकाई, धन X-अक्ष से झुकाव $= 45°$

हल— (i) माना रेखा का समीकरण $y = mx + c$ ...(1)

दिया है—Y-अक्ष पर अन्तःखण्ड $(c) = 5$ इकाई

तथा धन X-अक्ष से रेखा का झुकाव $(\theta) = 60°$

$\therefore$ रेखा की प्रवणता $(m) = \tan\theta$

$$= \tan 60°$$

$$= \sqrt{3}$$

c तथा m के मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$y = \sqrt{3}x + 5$$ उत्तर

(ii) माना रेखा का समीकरण $y = mx + c$ ...(1)

दिया है—Y-अक्ष पर अन्तःखण्ड $(c) = -7$ इकाई

तथा धन X-अक्ष से रेखा का झुकाव $(\theta) = 120°$

$\therefore$ रेखा की प्रवणता $(m) = \tan 120°$

या $m = \tan(90° + 30°)$

$$= -\cot 30°$$

$$= -\sqrt{3}$$

m तथा c के मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$y = -\sqrt{3}x + (-7)$$

या $y = -\sqrt{3}x + (-7)$ उत्तर

(iii) माना रेखा का समीकरण $y = mx + c$ ...(1)

दिया है—Y-अक्ष पर अन्तःखण्ड $(c) = 5$ इकाई

तथा धन X-अक्ष से रेखा का झुकाव $(\theta) = 135°$

$\therefore$ अतः रेखा की प्रवणता $(m) = \tan\theta$

या $m = \tan 135°$

$$= -1$$

c तथा m के मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$y = -1 \times x + 5$$

या $\quad y = -x + 5$ उत्तर

(iv) माना रेखा का समीकरण $\quad y = mx + c \quad$ ...(1)

दिया है—Y-अक्ष पर अन्तःखण्ड $(c) = 7$ इकाई

तथा धन X-अक्ष से रेखा का झुकाव $(\theta) = 60°$

$\therefore$ रेखा की प्रवणता $(m) = \tan\theta$

या $\quad m = \tan 60°$

या $\quad m = \sqrt{3}$

समीकरण (1) में c तथा m के मान रखने पर,

$y = \sqrt{3}x + 7$ उत्तर

(v) माना रेखा का समीकरण $\quad y = mx + c \quad$ ...(1)

दिया है—Y-अक्ष पर अन्तःखण्ड $(c) = -4$ इकाई

तथा धन X-अक्ष से रेखा का झुकाव $(\theta) = 60°$

$\therefore$ अतः रेखा की प्रवणता $(m) = \tan\theta$

या $\quad m = \tan 60°$

या $\quad m = \sqrt{3}$

समीकरण (1) में c तथा m के मान रखने पर,

$$y = \sqrt{3}x + (-4)$$

या $\quad y = \sqrt{3}x - 4 \Rightarrow \sqrt{3}x - y = 4$ उत्तर

(vi) माना रेखा का समीकरण, $\quad y = mx + c \quad$ ...(1)

दिया है—Y-अक्ष पर अन्तःखण्ड $(c) = 4$ इकाई

तथा धन X-अक्ष से रेखा का झुकाव $(\theta) = 45°$

अतः रेखा की प्रवणता $(m) = \tan\theta$

या $\quad m = \tan 45°$

या $\quad m = 1$

समीकरण (1) में c तथा m के मान रखने पर,

$$y = 1 \times x + 4$$

या $\quad y = x + 4$ उत्तर

2. निम्नलिखित रेखाओं द्वारा अक्षों पर कटे अन्तःखण्डों की लम्बाई ज्ञात कीजिए—

(i) $3x + 2y = 7$ **(ii)** $4x - 5y = 20$ **(iii)** $7x + 3y = 21$

(iv) $5x + 4y = 20$ **(v)** $2x - 5y = 10$ **(vi)** $8x + 4y + 16 = 0$

(vii) $x + y = 1$

हल— (i) दिया हुआ रेखा समीकरण, $3x+2y=7$

या $$\frac{3x}{7}+\frac{2y}{7}=1$$

या $\frac{x}{\frac{7}{3}}+\frac{y}{\frac{7}{2}}=1$ की तुलना रेखा के अन्तःखण्ड रूप $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ से करने पर,

$$a=\frac{7}{3},\quad b=\frac{7}{2}$$ **उत्तर**

(ii) दिया हुआ रेखा समीकरण,

$$4x-5y=20$$

या $$\frac{4x}{20}-\frac{5y}{20}=1$$

या $\frac{x}{5}+\frac{y}{-4}=1$ की तुलना रेखा के अन्तःखण्ड रूप $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ से करने पर,

$$a=5,\quad b=-4$$ **उत्तर**

(iii) दिया हुआ रेखा समीकरण,

$$7x+3y=21$$

या $$\frac{7x}{21}+\frac{3y}{21}=1$$

या $\frac{x}{3}+\frac{y}{7}=1$ की तुलना रेखा के अन्तःखण्ड रूप $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ से करने पर,

$$a=3,\quad b=7$$ **उत्तर**

(iv) दिया हुआ रेखा समीकरण,

$$5x+4y=20$$

या $$\frac{5x}{20}+\frac{4y}{20}=1$$

या $\frac{x}{4}+\frac{y}{5}=1$ की तुलना रेखा के अन्तःखण्ड रूप $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ से करने पर,

$$a=4,\quad b=5$$ **उत्तर**

(v) दिया हुआ रेखा समीकरण,

$$2x-5y=10$$

या $$\frac{2x}{10}-\frac{5y}{10}=1$$

या $$\frac{x}{5}-\frac{y}{2}=1$$

या $\frac{x}{5}+\frac{y}{-2}=1$ की तुलना रेखा के अन्तःखण्ड रूप $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ से करने पर,

$$a=5, \quad b=-2$$ उत्तर

(vi) दिया हुआ रेखा समीकरण,

$$8x+4y+16=0$$

या $$8x+4y=-16$$

या $$\frac{8x}{-16}+\frac{4y}{-16}=1$$

या $\frac{x}{-2}+\frac{y}{-4}=1$ की तुलना रेखा के अन्तःखण्ड रूप $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ से करने पर,

$$a=-2, \quad b=-4$$ उत्तर

(vii) दिया हुआ रेखा समीकरण,

$$x+y=1$$

या $$\frac{x}{1}+\frac{y}{1}=1$$

या $\frac{x}{1}+\frac{y}{1}=1$ की तुलना रेखा के अन्तःखण्ड रूप $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ से करने पर,

$$a=1, \quad b=1$$ उत्तर

3. मूल बिन्दु से होकर जाने वाली उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए, जो X-अक्ष के साथ 45° माप का कोण अन्तरित करती है।

हल—माना मूल बिन्दु से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण,

$$y=mx \quad \ldots(1)$$

दिया है—

रेखा का X-अक्ष से झुकाव $(\theta)=45°$

अतः रेखा की प्रवणता $(m)=\tan\theta=\tan 45°=1$

समीकरण (1) में $m=1$ रखने पर,

$$y=1\times x$$

या $$y=x \Rightarrow y-x=0$$ उत्तर

4. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए, जो मूल बिन्दु से होकर जाती है और X-अक्ष की धनात्मक दिशा से 30° का कोण बनाती है।

हल—माना मूल बिन्दु से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण,

$$y=mx \quad \ldots(1)$$

दिया है—

रेखा का X-अक्ष से झुकाव $(\theta)=30°$

$\therefore$ रेखा की प्रवणता $(m) = \tan \theta°$ से

$$m = \underline{\tan 30°} \Rightarrow m = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

m का यह मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}} \times x$$

या $$\sqrt{3}y = x \Rightarrow \sqrt{3}y - x = 0$$ उत्तर

5. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए, जो मूल बिन्दु से होकर जाती है तथा जिसकी प्रवणता 6 है।

हल—माना मूल बिन्दु से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण,

$$y = mx \quad \text{...(1)}$$

दिया है—रेखा की प्रवणता $(m) = 6$ समी० (1) में रखने पर,

$$y = 6 \times x$$

या $$y = 6x \Rightarrow y - 6x = 0$$ उत्तर

6. बिन्दु (3, 4) से होकर जाने वाली रेखा की प्रवणता –1 है। रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल—दिया है—$P(x_1, y_1) = (3, 4)$ तथा रेखा की प्रवणता $m = -1$

हम जानते हैं कि— बिन्दु $P(x_1, y_1)$ से होकर जाने वाली तथा m प्रवणता की रेखा का समीकरण,

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \text{...(1)}$$

दिए हुए मान रखने पर,

$$y - 4 = -1(x - 3)$$

या $$y - 4 = -x + 3$$

या $$y + x = 4 + 3 \Rightarrow y + x = 7$$ उत्तर

7. उन रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए, जो X-अक्ष तथा Y-अक्ष पर क्रमशः निम्नलिखित अन्तःखण्ड काटती हैं—

(i) –5 तथा 7 (ii) 3 तथा 4 (iii) –3 तथा –4

(i) 3 तथा –3 (ii) 2 तथा 2 (iii) 7 तथा –4

हल— अन्तःखण्ड रूप में रेखा का समीकरण, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ...(1)

जहाँ X-अक्ष पर कटा अन्तःखण्ड $= a$

तथा Y-अक्ष पर कटा अन्तःखण्ड $= b$

(i) दिया है— $a = -5,\ b = 7$

$\therefore$ रेखा का समीकरण, $\frac{x}{-5} + \frac{y}{7} = 1$

या $$-\frac{x}{5}+\frac{y}{7}=1 \quad \text{या} \quad \frac{x}{5}-\frac{y}{7}+1=0$$ उत्तर

(ii) दिया है— $a=3,\ b=4$

अत: रेखा का समीकरण, $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}-1=0$ उत्तर

(iii) दिया है— $a=-3,\ b=-4$

∴ रेखा का समीकरण, $$\frac{x}{-3}+\frac{y}{-4}=1$$

या $$-\frac{x}{3}-\frac{y}{4}=1 \Rightarrow \frac{x}{3}+\frac{y}{4}+1=0$$ उत्तर

(iv) दिया है— $a=3,\ b=-3$

∴ रेखा का समीकरण, $$\frac{x}{3}+\frac{y}{-3}=1$$

या $$\frac{x}{3}-\frac{y}{3}-1=0$$ उत्तर

(v) दिया है— $a=2,\ b=2$

∴ रेखा का समीकरण, $$\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=1$$

या $$\frac{x}{2}+\frac{y}{2}-1=0$$ उत्तर

(vi) दिया है— $a=7,\ b=-4$

∴ रेखा का समीकरण, $$\frac{x}{7}+\frac{y}{-4}=1$$

या $$\frac{x}{7}-\frac{y}{4}-1=0$$ उत्तर

8. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो अक्षों की धन दिशाओं पर समान अन्त:खण्ड काटती है तथा बिन्दु (–4, 3) से होकर जाती है।

हल—माना X-अक्ष पर कटा अन्त:खण्ड $= a$ है।

तब Y-अक्ष पर कटा अन्त:खण्ड $= a$ होगा।

∴ रेखा का समीकरण, $\frac{x}{a}+\frac{y}{a}=1$

या $$x+y=a \quad \ldots(1)$$

रेखा (1) बिन्दु (–4, 3) से होकर जाती है।

∴ समीकरण (1) में $x=-4$ तथा $y=3$ रखने पर,

$$-4+3=a$$

या $$-1=a \quad \Rightarrow \quad a=-1$$

a का मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$x+y=1$$

या $$x+y+1=0$$ उत्तर

9. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (1, −2) से होकर जाती है तथा दोनों अक्षों पर समान अन्तःखण्ड काटती है।

हल—माना X-अक्ष पर रेखा द्वारा कटा अन्तःखण्ड $= a$ है।

तब Y-अक्ष पर रेखा द्वारा कटा अन्तःखण्ड $= a$

∴ रेखा का समीकरण, $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{a}=1$

या $$x+y=a \qquad \ldots(1)$$

रेखा (1) बिन्दु (1, −2) से होकर जाती है।

∴ समीकरण (1) में $x=1$ तथा $y=-2$ रखने पर,

$$1-2=a \Rightarrow a=-1$$ समीकरण (1) में रखने पर,

$$x+y=-1$$

या $$x+y+1=0$$ उत्तर

10. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जिस पर बिन्दु (2, 2) स्थित है और जिसके द्वारा अक्षों पर कटे अन्तःखण्डों का योग 9 मात्रक है।

हल—माना रेखा का अन्तःखण्ड रूप समीकरण, $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1 \qquad \ldots(1)$

जहाँ X-अक्ष पर कटा अन्तःखण्ड $= a$

तथा Y-अक्ष पर कटा अन्तःखण्ड $= b$

प्रश्नानुसार, $$a+b=9 \qquad \ldots(2)$$

चूँकि रेखा (1) पर बिन्दु (2, 2) स्थित है। अतः समीकरण (1) में $x=2$ तथा $y=2$ रखने पर,

$$\frac{2}{a}+\frac{2}{b}=1$$

या $$2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=1$$

या $$\frac{2(b+a)}{ab}=1$$

या $$2(a+b)=ab$$

या $$2\times 9=ab$$ समीकरण (1) से

या $$ab=18 \qquad \ldots(3)$$

समीकरण (2) के दोनों पक्षों का वर्ग करने पर,

$$(a+b)^2=9^2$$

या $$a^2+b^2+2ab=81$$

या $$a^2+b^2-2ab+4ab=81$$

या $$(a-b)^2+4\times 18=81$$

या $(a-b)^2+72=81$

या $(a-b)^2=81-72$

या $(a-b)^2=9$

या $a-b=\sqrt{9}$

या $a-b=3$ ...(4)

समीकरण (2) व (4) को जोड़ने पर,

$$2a=12$$

या $a=6$ यह मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$6+b=9$$

या $b=9-6=3$

अब, a व b के प्राप्त मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$\frac{x}{6}+\frac{y}{3}=1$$ उत्तर

11. निम्नलिखित बिन्दुओं से खींची जाने वाली रेखाओं की प्रत्येक प्रतिबन्ध के अनुसार प्रवणता ज्ञात कीजिए—

(i) (4, 6) तथा (–2, 3) (ii) (–2, 5) तथा (6, 4)

(iii) (0, 4) तथा (4, 0) (ii) (a, b) तथा $(a\sec^2\alpha, b\operatorname{cosec}^2\alpha)$

हल— हम जानते हैं कि—

बिन्दु $A(x_1, y_1)$ तथा $B(x_2, y_2)$ से होकर जाने वाली रेखा की प्रवणता,

$$(m)=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

(i) $A(x_1, y_1)=(4, 6)$

तथा $B(x_2, y_2)=(-2, 3)$

∴ बिन्दु A व B से होकर जाने वाली रेखा की प्रवणता,

$$(m)=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$=\frac{3-6}{-2-4}=\frac{-3}{-6}$$

$$=\frac{1}{2}$$ उत्तर

(ii) $A(x_1, y_1)=(-2, 5)$ तथा $B(x_2, y_2)=(6, 4)$

∴ बिन्दु A व B से होकर जाने वाली रेखा की प्रवणता,

$$(m)=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$= \frac{4-5}{6-(-2)} = \frac{-1}{6+2}$$

$$= -\frac{1}{8}$$ उत्तर

(iii) $A(x_1, y_1) = (0, 4)$ तथा $B(x_2, y_2) = (4, 0)$

$\therefore$ बिन्दु A व B से होकर जाने वाली रेखा की प्रवणता,

$$(m) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{0-4}{4-0} = \frac{-4}{4}$$

$$= -1$$ उत्तर

(iv) $A(x_1, y_1) = (a, b)$ तथा $B(x_2, y_2) = (a \sec^2 \alpha, b \operatorname{cosec}^2 \alpha)$

$\therefore$ बिन्दु A व B से होकर जाने वाली रेखा की प्रवणता,

$$(m) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{b \operatorname{cosec}^2 \alpha - b}{a \sec^2 \alpha - a}$$

$$= \frac{b(\operatorname{cosec}^2 \alpha - 1)}{a(\sec^2 \alpha - 1)}$$

$$= \frac{b \cot^2 \alpha}{a \tan^2 \alpha}$$

$$= \frac{b}{a} \cot^2 \alpha \times \cot^2 \alpha$$

$$= \frac{b}{a} \cot^4 \alpha$$ उत्तर

12. मूल बिन्दु से रेखा $2x + 3y = 5$ पर डाले गए लम्ब की माप तथा X-अक्ष पर इसकी प्रवणता ज्ञात कीजिए।

हल—दी गई रेखा का समीकरण,

$$2x + 3y = 5$$

दोनों पक्षों में $\sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$ से भाग करने पर,

$$\frac{2}{\sqrt{13}} x + \frac{3}{\sqrt{13}} y = \frac{5}{\sqrt{13}}$$

जो रेखा के लम्ब रूप अर्थात $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ के रूप में है।

जहाँ $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}, \quad \sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}, \quad p = \frac{5}{\sqrt{13}}$

अतः मूल बिन्दु से रेखा पर डाले लम्ब की माप $= p = \dfrac{5}{\sqrt{13}}$ उत्तर

$$\because \qquad \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{3}{\sqrt{13}}}{\frac{2}{\sqrt{13}}} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \qquad \alpha = \tan^{-1}\frac{3}{2}$$

अतः X-अक्ष पर लम्ब की प्रवणता $(m) = \alpha = \tan^{-1}\dfrac{3}{2}$ उत्तर

13. X-अक्ष से 45° का कोण बनाने वाली उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए, जिस पर बिन्दु (1, 4) स्थित है।

हल—माना रेखा का समीकरण, $y = mx + c$ ...(1)

$\because$ रेखा का X-अक्ष के साथ कोण $(\theta) = 45^\circ$

अतः रेखा की प्रवणता $(m) = \tan\theta = \tan 45^\circ = 1$

रेखा बिन्दु (1, 4) से होकर जाती है।

समीकरण (1) में $m = 1$ तथा $x = 1, y = 4$ रखने पर

$$4 = 1 \times 1 + c$$

या $\quad 4 = 1 + c \quad \Rightarrow \quad c = 4 - 1 = 3$

अतः रेखा का अभीष्ट समीकरण,

$$y = 1 \times x + 3$$

या $\quad y = x + 3$

या $\quad x - y + 3 = 0$ उत्तर

14. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (6, 5) से होकर जाती है। जबकि यह बिन्दु रेखा के अक्षों के बीच कटे अन्तःखण्ड को 3 : 4 के अनुपात में विभाजित करता है।

हल—माना रेखा द्वारा X-अक्ष से कटे अन्तःखण्ड की माप $= a$ मात्रक तथा Y-अक्ष से कटे अन्तःखण्ड की माप $= b$ मात्रक है।

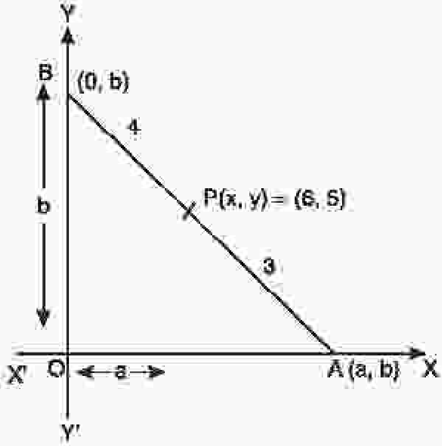
अतः रेखा X-अक्ष को बिन्दु $A(a, 0)$ तथा Y-अक्ष को $B(0, b)$ पर काटेगी।

माना बिन्दु $P(x, y) = (6, 5)$, बिन्दु A को B मिलाने वाली रेखा को 3 : 4 के अनुपात में अन्तः विभाजित करता है।

इस प्रकार अन्तः विभाजन के लिए—

$$x_1 = a, \quad y_1 = 0 \quad x_2 = 0, \quad y_2 = b$$

$$m_1 = 3 \quad m_2 = 4 \quad P(x, y) \equiv (6, 5)$$



तब $$x = \frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}$$ सूत्र से,

$$6 = \frac{3 \times 0 + 4 \times a}{3+4}$$

या $$6 = \frac{4a}{7} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{6 \times 7}{4} = \frac{21}{2}$$

तथा $$y = \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2}$$ सूत्र से,

$$5 = \frac{3 \times b + 4 \times 0}{3+4}$$

या $$5 = \frac{3b}{7} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{5 \times 7}{3} = \frac{35}{3}$$

अत: रेखा का अभीष्ट समीकरण,

सूत्र $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ में च a के b मान रखने पर,

$$\frac{x}{\frac{21}{2}} + \frac{y}{\frac{35}{3}} = 1$$

या $$\frac{2x}{21} + \frac{3y}{35} = 1$$

या $$\frac{10x + 9y}{105} = 1$$

या $10x + 9y = 105$ उत्तर

15. बिन्दु (6, – 4) से होकर जाने वाली उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए। जिसके द्वारा अक्षों से कटे अन्त:खण्डों का योग 7 मात्रक है।

हल—माना रेखा का समीकरण, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ ...(1)

जहाँ a तथा b रेखा (1) द्वारा क्रमशः X-अक्ष तथा Y-अक्ष पर काटे गए अन्तःखण्ड हैं।

प्रश्नानुसार, $a+b=7$ ...(2)

रेखा (1) बिन्दु $(6,-4)$ से होकर जाती है। अतः समीकरण (1) में $x=6$ तथा $y=-4$ रखने पर,

$$\frac{6}{a}+\frac{-4}{b}=1$$

या $$\frac{6b-4a}{ab}=1$$

या $$6b-4a=ab$$

या $$6(7-a)-4a=a(7-a)$$ [समीकरण (2) से $b=7-a$ रखने पर]

या $$42-6a-4a=7a-a^2$$

या $$42-10a=7a-a^2$$

या $$a^2-10a-7a+42=0$$

या $$a^2-17a+42=0$$

या $$a^2-14a-3a+42=0$$

या $$a(a-14)-3(a-14)=0$$

या $$(a-14)(a-13)=0$$

$\Rightarrow$ $a=14$ या $a=3$

यदि $a=14$ तब $b=7-a=7-14=-7$

तथा यदि $a=3$ तब $b=7-a=7-3=4$

अतः रेखा का समीकरण जब $a=14$ तथा $b=-7$,

$$\frac{x}{14}+\frac{y}{-7}=1$$

या $$\frac{x}{14}-\frac{y}{7}=1$$

या $$x-2y=14$$ उत्तर

तथा रेखा का समीकरण जब $a=3$ तथा $b=4$,

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$$

या $$4x+3y=12$$ उत्तर

16. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए, जो बिन्दु (3, 4) से होकर जाती है तथा जिसके द्वारा अक्षों पर कटे अन्तःखण्डों का योग 14 है।

हल—माना रेखा का समीकरण, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ ...(1)

जहाँ a तथा b रेखा (1) द्वारा क्रमशः X-अक्ष तथा Y-अक्ष पर काटे गए अन्तःखण्ड हैं।

प्रश्नानुसार,

रेखा (1) बिन्दु (3, 4) से होकर जाती है। अतः समीकरण (1) में, $x=3$ तथा $y=4$ रखने पर,

$$\frac{3}{a}+\frac{4}{b}=1$$

या $$\frac{3b+4a}{ab}=1$$

या $$3b+4a=ab \quad ...(2)$$

परन्तु प्रश्नानुसार,

$$a+b=14$$

या $$b=14-a \quad ...(3)$$

समीकरण (3) से b का मान समीकरण (2) में रखने पर,

$$3(14-a)+4a=a(14-a)$$

या $$42-3a+4a=14a-a^2$$

या $$a^2-3a+4a-14a+42=0$$

या $$a^2-13a+42=0$$

या $$a^2-7a-6a+42=0$$

या $$a(a-7)-6(a-7)=0$$

या $$(a-7)(a-6)=0$$

$\Rightarrow$ $a=7$ या $a=6$

यदि $a=7$ तब समीकरण (3) से, $b=14-7=7$

तथा यदि $a=6$ तब समीकरण (3) से, $b=14-6=8$

अतः रेखा का समीकरण जब $a=7$, $b=7$,

$$\frac{x}{7}+\frac{y}{7}=1$$

या $$x+y=7$$ उत्तर

तथा रेखा का समीकरण जब $a=6$, $b=8$,

$$\frac{x}{6}+\frac{y}{8}=1$$

या $$4x+3y=24$$ उत्तर

17. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए, जो बिन्दु (3, 2) से होकर जाती है और X-अक्ष तथा Y-अक्ष के धनात्मक दिशा में 3 : 4 के अनुपात में अन्तःखण्ड काटती है।

हल—माना रेखा का समीकरण,

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad ...(1)$$

जहाँ $a = X$-अक्ष से कटा अन्तःखण्ड

तथा $b = Y$-अक्ष से कटा अन्तःखण्ड

चूँकि रेखा (1) बिन्दु (3, 2) से होकर जाती है अतः समीकरण (1) में $x = 3$ तथा $y = 2$ रखने पर,

$$\frac{3}{a}+\frac{2}{b}=1$$

या $$3b+2b=ab \qquad ...(2)$$

परन्तु प्रश्नानुसार, $a:b=3:4$

या $$\frac{a}{b}=\frac{3}{4}$$

या $b=\frac{4a}{3}$ यह मान समीकरण (2) में रखने पर,

$$3\times\frac{4a}{3}+2a=a\times\frac{4a}{3}$$

या $$4a+2a=\frac{4a^2}{3}$$

या $$6a=\frac{4a^2}{3}$$

या $$18a=4a^2$$

या $$4a^2-18a=0$$

या $$2a(2a-9)=0$$

या $$a(2a-9)=0$$

$\Rightarrow$ $a=0$ तथा $2a-9=0$

या $$a=\frac{9}{2}$$

जब $a=0$ तब $b=\frac{4\times0}{3}=0$

तथा जब $a=\frac{9}{2}$ तब $b=\frac{4\times\frac{9}{2}}{3}=\frac{18}{3}=6$

अतः रेखा का अभीष्ट समीकरण,

$$\frac{x}{\frac{9}{2}}+\frac{y}{6}=1$$

या $$\frac{2x}{9}+\frac{y}{6}=1 \Rightarrow 4x+3y=18$$ उत्तर

18. यदि बिन्दु (3, − 5) तथा बिन्दु (2, 4) रेखा $y = mx + c$ पर स्थित हों तो m और c के मान ज्ञात कीजिए।

हल—दी गई रेखा का समीकरण,

$$y = mx + c \quad \ldots(1)$$

बिन्दु (3, −5) रेखा (1) पर स्थित है। अतः रेखा में $x = 3$ तथा $y = -5$ रखने पर,

$$-5 = m \times 3 + c$$

या $$-5 = 3m + c$$

या $$c = -5 - 3m \quad \ldots(2)$$

तथा बिन्दु (2, 4) भी रेखा (1) पर स्थित है। अतः समीकरण (1) में $x = 2$ तथा $y = 4$ रखने पर

$$4 = m \times 2 + c$$

या $$4 = 2m + c \Rightarrow c = 4 - 2m \quad \ldots(3)$$

समीकरण (2) व (3) से,

$$-5 - 3m = 4 - 2m$$

या $$-3m + 2m = 4 + 5$$

या $$-m = 9 \Rightarrow m = -9$$

अब, m का मान समीकरण (3) में रखने पर,

$$c = 4 - 2 \times (-9) = 4 + 18 = 22$$

अतः $$m = -9, \quad c = 22$$ उत्तर

19. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जिस पर मूल बिन्दु से डाले गए लम्ब की माप 8 मात्रक तथा लम्ब का X-अक्ष से झुकाव 30° हो।

हल—माना रेखा का समीकरण,

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p \quad \ldots(1)$$

प्रश्नानुसार,

मूल बिन्दु से रेखा (1) पर डाले गए लम्ब की माप $(p) = 8$ मात्रक

तथा लम्ब का X-अक्ष से झुकाव $(\alpha) = 30°$

समीकरण (1) में p तथा α के मान रखने पर,

$$x\cos 30° + y\sin 30° = 8$$

या $$x \times \frac{\sqrt{3}}{2} + y \times \frac{1}{2} = 8$$

या $$\frac{x\sqrt{3}}{2} + \frac{y}{2} = 8$$

या $$x\sqrt{3} + y = 16$$ उत्तर

20. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जिस पर मूलबिन्दु से डाले गए लम्ब की माप 3 मात्रक है तथा उस पर लम्ब की प्रवणता $\sqrt{3}$ है। रेखा का X-अक्ष के धन भाग से झुकाव भी ज्ञात कीजिए।

हल—माना रेखा का समीकरण,

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p \qquad \ldots(1)$$

प्रश्नानुसार,

मूल बिन्दु से रेखा (1) पर डाले गए लम्ब की माप $(p) = 3$ मात्रक

तथा लम्ब की प्रवणता $(m) = \sqrt{3}$

या $\tan\alpha = \sqrt{3}$

या $\tan\alpha = \tan 60^\circ$

या $\alpha = 60^\circ$

अतः p तथा α के मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$x\cos 60^\circ + y\sin 60^\circ = 3$$

या $$x \times \frac{1}{2} + y \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$$

या $$x + y\sqrt{3} = 6 \qquad \ldots(2) \qquad \text{उत्तर}$$

माना दी हुई रेखा का X-अक्ष के धन भाग से झुकाव $= \theta$

समीकरण (2) से,

$$y = \frac{-x}{\sqrt{3}} + \frac{6}{\sqrt{3}}$$ की तुलना $y = mx + c$ से करने पर,

$$m = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

या $$\tan\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

या $\tan\theta = \tan 150^\circ$

या $\theta = 150^\circ$ उत्तर

अभ्यास 14.3

1. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (–1, 2) से होकर जाती है तथा जिसकी प्रवणता $\frac{2}{5}$ है।

हल—दिया हुआ बिन्दु $(x_1, y_1) = (-1, 2)$

तथा रेखा की प्रवणता $(m) = \frac{2}{5}$

एक बिन्दु से होकर जाने वाली रेखा के सूत्र $y - y_1 = m(x - x_1)$ से,

$$y-2=\frac{2}{5}\{x-(-1)\}$$

या $$y-2=\frac{2}{5}\{x+1\}$$

या $$5y-10=2x+2$$

या $$5y=2x+2+10$$

या $$5y=2x+12$$

या $$\mathbf{2x-5y+12=0}$$ उत्तर

2. $P(4, 0)$ व $Q(0, -3)$ से होकर जाने वाली रेखा PQ का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल—दिया है—

$$P(4,0)=(x_1, y_1)$$

$$Q(0,-3)=(x_2, y_2)$$

दो बिन्दु से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण,

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1) \text{ सूत्र से,}$$

$$y-0=\frac{-3-0}{0-4}(x-4)$$

या $$y=\frac{-3}{-4}(x-4)$$

या $$\frac{y}{-3}=\frac{x}{-4}-\frac{4}{-4}$$

या $$-\frac{y}{3}=-\frac{x}{4}+1$$

या $$\mathbf{\frac{x}{4}-\frac{y}{3}=1}$$ उत्तर

3. बिन्दु (a, b) से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए। जिसकी प्रवणता $-\frac{b}{a}$ है।

हल—दिया है—

$$(x_1, y_1)=(a, b)$$

$$\text{तथा प्रवणता } (m)=-\frac{b}{a}$$

एक बिन्दु से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण,

$$y-y_1=m(x-x_1) \text{ सूत्र से,}$$

$$y-b=\frac{-b}{a}(x-a)$$

या $\quad ay-ab=-bx+ab$

या $\quad bx+ay-ab-ab=0$

या $\quad bx+ay-2ab=0$ **उत्तर**

4. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए, जो बिन्दुओं (a, b) तथा (ab, b^2) से होकर जाती है।

हल—दिया है—

$$(x_1, y_1)=(a, b)$$

तथा $$(x_2, y_2)=(ab, b^2)$$

दो बिन्दुओं से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण,

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1) \text{ सूत्र से,}$$

$$y-b=\frac{b^2-b}{ab-a}(x-a)$$

या $$y-b=\frac{b(b-1)}{a(b-1)}(x-a)$$

या $$y-b=\frac{b}{a}(x-a)$$

या $$\frac{y}{b}-\frac{b}{b}=\frac{x}{a}-\frac{a}{a}$$

या $$\frac{y}{b}-1=\frac{x}{a}-1$$

या $$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}-1+1=0$$

या $$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$$ **उत्तर**

5. धन X-अक्ष से $45°$ का कोण बनाने वाली उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए, जिस पर $(1, 4)$ बिन्दु स्थित है।

हल— रेखा का धन X-अक्ष से कोण $(\theta)=45°$

$\therefore$ रेखा की प्रवणता $(m)=\tan\theta$

या $$m=\tan 45°$$

या $$m=1$$

रेखा पर स्थित बिन्दु $(x_1, y_1)=(1, 4)$

एक बिन्दु से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण,

$$y-y_1=m(x-x_1) \text{ सूत्र से,}$$

$$y-4=1(x-1)$$

या $$y-4=x-1$$

या $$x-y-1+4=0$$

या $$x-y+3=0$$ उत्तर

6. बिन्दु (2, 3) व (6, 5) से होकर जाने वाली रेखा की प्रवणता ज्ञात कीजिए।

हल—दिया है— $(x_1, y_1)=(2, 3)$

तथा $(x_2, y_2)=(6, 5)$

दो बिन्दुओं से होकर जाने वाली रेखा की प्रवणता,

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

या $$m=\frac{5-3}{6-2}$$

$$=\frac{2}{4}$$

$$=\frac{1}{2}$$ उत्तर

7. बिन्दु (0, 6) से होकर जाने वाली तथा X-अक्ष की धनात्मक दिशा से 45° का कोण बनाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल— रेखा का X-अक्ष की धनात्मक दिशा से झुकाव $(\theta)=45°$

$\therefore$ रेखा की प्रवणता $(m)=\tan\theta$

$$=\tan 45°$$

$$=1$$

दिया हुआ बिन्दु $(x_1, y_1)=(0, 6)$

एक बिन्दु से होकर जाने वाली तथा m प्रवणता वाली रेखा का समीकरण,

$y-y_1=m(x-x_1)$ सूत्र से,

$$y-6=1(x-0)$$

या $$y-6=x$$

या $$x-y+6=0$$ उत्तर

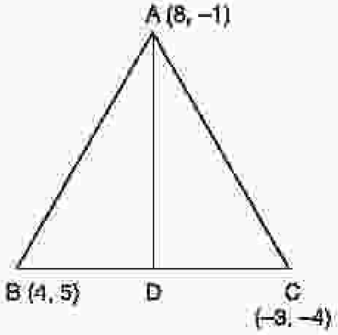
8. ΔABC के शीर्षों के निर्देशांक $A(8,-1)$, $B(4, 5)$ व $C(-3,-4)$ है। शीर्ष A से होकर जाने वाली माध्यिका का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल—दिया है—

ΔABC के शीर्षों के निर्देशांक

$A(8,-1)$, $B(4, 5)$ तथा $C(-3, 4)$

$\therefore$ शीर्ष A से होकर जाने वाली माध्यिका सम्मुख भुजा BC के मध्य-बिन्दु D पर मिलती है।



अतः BC के मध्य-बिन्दु D के निर्देशांक

$$= \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) \text{ सूत्र से,}$$

$$= \left(\frac{4+(-3)}{2}, \frac{5+(-4)}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{4-3}{2}, \frac{5-4}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

माध्यिका AD का समीकरण = बिन्दु A व D से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण

सूत्र $$y-y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1) \text{ से,}$$

$$y-(-1) = \frac{\frac{1}{2}-(-1)}{\frac{1}{2}-8}(x-8) \qquad \left[\begin{array}{l} (x_1, y_1) = A(8,-1) \\ (x_2, y_2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \end{array}\right]$$

या $$y+1 = \frac{\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}-8}(x-8)$$

या $$y+1 = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{-15}{2}}(x-8)$$

या $$y+1 = \frac{3}{-15}(x-8)$$

या $$-15y-15 = 3x-24$$

या $$3x+15y+15-24 = 0$$

या $$3x+15y-9 = 0$$

या $$x+5y-3 = 0$$ उत्तर

9. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए, जो धन X-अक्ष से $120°$ का कोण बनाती है और उस बिन्दु से होकर जाती है जहाँ रेखा $2x + y = 4$, X-अक्ष को काटती है।

हल— रेखा का धन X-अक्ष से बना कोण $(\theta) = 120°$

$\therefore$ रेखा की प्रवणता $(m) = \tan\theta$

$$= \tan 120°$$
$$= -\sqrt{3}$$

माना रेखा $2x + y = 4$, X-अक्ष को बिन्दु $(a, 0)$ पर काटती है।

अतः इस समीकरण में $x = a$ तथा $y = 0$ रखने पर,

$$2a + 0 = 4$$

या $$2a = 4 \Rightarrow a = 2$$

अतः वह बिन्दु जहाँ रेखा X-अक्ष को काटती $(2, 0)$ है,

हमें उस रेखा का समीकरण ज्ञात करना है जिसकी प्रवणता $\sqrt{3}$ तथा जो बिन्दु $(2, 0)$ से होकर जाती है।

अतः एक बिन्दु से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण,

$$y - y_1 = m(x - x_1) \text{ सूत्र से,}$$

$$y - 0 = -\sqrt{3}(x - 2) \qquad [\because (x_1, y_1) = (2, 0)]$$

या $$y = -\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$$

या $$\sqrt{3}x + y = 2\sqrt{3}$$ **उत्तर**

10. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(-3, 1)$ से जाती है तथा धन X-अक्ष से $60°$ का कोण बनाती है।

हल— रेखा का धन X-अक्ष से झुकाव (कोण) $= 60°$

$\therefore$ रेखा की प्रवणता $(m) = \tan\theta = \tan 60° = \sqrt{3}$

तथा दिया हुआ बिन्दु $(x_1, y_1) = (-3, 1)$

एक बिन्दु से होकर जाने वाली तथा प्रवणता m वाली रेखा का समीकरण,

$$y - y_1 = m(x - x_1) \text{ सूत्र से,}$$

अतः $$y - 1 = \sqrt{3}\{x - (-3)\}$$

या $$y - 1 = \sqrt{3}(x + 3)$$

या $$y - 1 = \sqrt{3}x + 3\sqrt{3}$$

या $$\sqrt{3}x - y + 3\sqrt{3} + 1 = 0$$ **उत्तर**

11. मूल बिन्दु से होकर जाने वाली उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए, जो X-अक्ष से $30°$ का कोण बनाती है।

हल— रेखा का X-अक्ष से बना कोण (झुकाव) $= 30°$

$\therefore$ रेखा की प्रवणता $= m = \tan\theta$

$$= \tan 30^\circ$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}$$

मूल बिन्दु के निर्देशांक $= (0, 0)$

मूल बिन्दु से होकर जाने वाली तथा प्रवणता m की रेखा का समीकरण,

$y - y_1 = m(x - x_1)$ सूत्र से,

अतः $\quad y - 0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(x - 0)$

या $\quad y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$

या $\quad \sqrt{3}y = x \quad \Rightarrow \quad x - \sqrt{3}y = 0$ उत्तर

12. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (1, 2) से होकर जाती है तथा X-अक्ष की धनात्मक दिशा से 60° का झुकाव बनाती है।

हल— रेखा का X-अक्ष की धनात्मक दिशा से झुकाव $(\theta) = 60^\circ$

$\therefore$ रेखा की प्रवणता, $\quad m = \tan\theta$ सूत्र से,

$$m = \tan 60^\circ$$

या $\quad m = \sqrt{3}$

रेखा बिन्दु $(x_1, y_1) = (1, 2)$ से होकर जाती है।

एक बिन्दु से होकर जाने वाली तथा m प्रवणत की रेखा का समीकरण,

$y - y_1 = m(x - x_1)$ सूत्र से,

$$y - 2 = \sqrt{3}(x - 1)$$

या $\quad y - 2 = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$

या $\quad \sqrt{3}x - y + 2 - \sqrt{3} = 0$ उत्तर

13. बिन्दु (3, 4) से होकर जाने वाली रेखा की प्रवणता -1 है रेखा की समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल—दिया है— बिन्दु $(x_1, y_1) = (3, 4)$

तथा $\quad$ प्रवणता $(m) = -1$

सूत्र, $y - y_1 = m(x - x_1)$ से रेखा का समीकरण,

$$y - 4 = -1(x - 3)$$

या $\quad y - 4 = -x + 3 \quad \Rightarrow \quad x + y = 4 + 3$

या $\quad x + y = 7$ उत्तर

14. यदि तीन बिन्दु (a, b), (c, d) तथा $(a - c, b - d)$ संरेख हों, तो सिद्ध कीजिए कि $ad = bc$

हल—दिए गए बिन्दु, $\quad A(x_1, y_1) = (a, b)$

$$B(x_2, y_2) = (c, d)$$

तथा $$C(x_3, y_3) = (a-c, b-d)$$

यदि तीन बिन्दु A, B व C संरेख हैं तब

रेखा AB की प्रवणता = रेखा BC की प्रवणता

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$$

या $$\frac{d-b}{c-a} = \frac{(b-d)-d}{(a-c)-c}$$

या $$\frac{d-b}{c-a} = \frac{b-d-d}{a-c-c}$$

या $$\frac{d-b}{c-a} = \frac{b-2d}{a-2c}$$

या $$(d-b)(a-2c) = (c-a)(b-2d)$$

या $$ad - 2cd - ab + 2bc = bc - 2cd - ab + 2ad$$

या $$ad + 2bc = bc + 2ad$$

या $$2bc - bc = 2ad - ad \Rightarrow bc = ad$$

या $$ad = bc$$ इति सिद्धम्

15. यदि $\frac{1}{h} + \frac{1}{k} = \frac{1}{3}$ तो सिद्ध कीजिए कि तीन बिन्दु $(3, 3)$, $(h, 0)$ और $(0, k)$ संरेख हैं।

हल—दिए गए तीन बिन्दु— $(3, 3)$, $(h, 0)$ और $(0, k)$

उपर्युक्त तीनों बिन्दु संरेख होंगे यदि—

बिन्दु $(3, 3)$ व $(h, 0)$ से होकर जाने वाली रेखा की प्रवणता

= बिन्दु $(h, 0)$ व $(0, k)$ से होकर जाने वाली रेखा की प्रवणता

अतः $$\frac{0-3}{h-3} = \frac{k-0}{0-h}$$

या $$\frac{-3}{h-3} = \frac{k}{-h}$$

या $$3h = hk - 3k$$

या $$3k + 3h = hk$$

या $$3(k+h) = hk$$

या $$k + h = \frac{hk}{3}$$

या $$\frac{k+h}{hk} = \frac{1}{3}$$

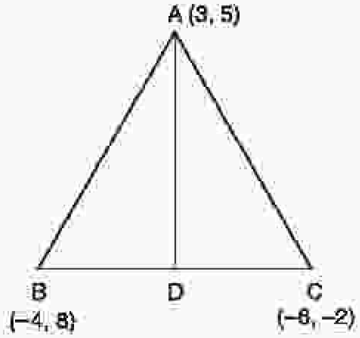
या $$\frac{k}{hk} + \frac{h}{hk} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{h} + \frac{1}{k} = \frac{1}{3}$$ इति सिद्धम्

16. ΔABC के शीर्षों के निर्देशांक क्रमशः $A(3, 5)$, $B(-4, 8)$ तथा $C(-6, -2)$ हैं। शीर्ष A से खींची गई त्रिभुज की माध्यिका का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल—दिया है—

ΔABC के शीर्ष $A(3, 5)$, $B(-4, 8)$ तथा $C(-6, 2)$ हैं।

माना शीर्ष A से खींची गई माध्यिका सम्मुख भुजा BC के मध्य बिन्दु D पर मिलती है।



अतः बिन्दु D के निर्देशांक

$$=\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) \text{ सूत्र से,}$$

$$=\left(\frac{-4-6}{2}, \frac{8-2}{2}\right) \quad [\because (x_1, y_1) = (-4, 8), (x_2, y_2) = (-6, -2)]$$

$$=\left(\frac{-10}{2}, \frac{6}{2}\right)$$

$$=(-5, 3)$$

माध्यिका AD का समीकरण = बिन्दु A व D से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण

अतः $$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1) \text{ सूत्र से,}$$

$$y-5=\frac{3-5}{-5-3}(x-3) \quad \left[\begin{array}{l}(x_1, y_1)=(3, 5)\\ (x_2, y_2)=(-5, 3)\end{array}\right]$$

या $$y-5=\frac{-2}{-8}(x-3)$$

या $$y-5=\frac{1}{4}(x-3)$$

या $$4y-20=x-3$$

या $$x-4y-3+20=0$$

या $$\mathbf{x-4y+17=0}$$ **उत्तर**

17. सिद्ध कीजिए कि बिन्दुओं (1, 3) तथा (3, 5) से होकर जाने वाली रेखा बिन्दु (p, q) से होकर जाएगी यदि $p-q+2=0$।

हल—दिए गए बिन्दु, $A(x_1, y_1)=(1, 3)$

$B(x_2, y_2)=(3, 5)$

अतः बिन्दु A व B से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण,

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

या $$y-3=\frac{5-3}{3-1}(x-1)$$

या $$y-3=\frac{2}{2}(x-1)$$

या $$y-3=x-1$$

या $$x-y-1+3=0$$

या $$x-y+2=0 \quad \ldots(1)$$

रेखा (1) बिन्दु (p, q) से होकर जाती है।

अतः रेखा (1) में $x=p$ तथा $y=q$ रखने पर,

$$p-q+2=0$$ उत्तर

अभ्यास 14.4

1. निम्नलिखित समीकरणों को प्रवणता अन्तःखण्ड रूप में परिवर्तित कीजिए और उनके प्रवणता तथा Y-अन्तःखण्ड ज्ञात कीजिए—

(i) $x+7y=0$ (ii) $6x+3y-5=0$ (iii) $y=0$

हल—(i) दी गई समीकरण,

$$x+7y=0$$

या $$7y=-x+0$$

या $$y=\frac{-x}{7}+0$$

या $y=\frac{-x}{7}+0$ की तुलना $y=mx+c$ से करने पर,

$$m=-\frac{1}{7} \quad \text{तथा} \quad c=0$$ उत्तर

(ii) दी गई समीकरण,

$$6x+3y-5=0$$

या $$3y=-6x+5$$

या $$y=\frac{-6x}{3}+\frac{5}{3}$$

या $\quad y = -2x + \frac{5}{3}$ की तुलना $y = mx + x$ से करने पर,

$$m = -2, \quad c = \frac{5}{3}$$ उत्तर

(iii) दी गई समीकरण,

$$y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0 \cdot x + 0$$ की तुलना

$y = mx + c$ से करने पर,

$$m = 0 \quad \text{तथा} \quad c = 0$$ उत्तर

2. निम्नलिखित समीकरणों को अन्त:खण्ड रूप में परिवर्तित कीजिए और अक्षों पर इनके द्वारा काटे गए अन्त:खण्ड ज्ञात कीजिए—

(i) $3x + 2y - 12 = 0$ (ii) $4x - 3y = 6$ (iii) $3y + 2 = 0$

हल—(i) दी गई समीकरण,

$$3x + 2y - 12 = 0$$

या $$3x + 2y = 12$$

या $$\frac{3x}{12} + \frac{2y}{12} = \frac{12}{12}$$

या $\quad \frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1$ की तुलना $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ से करने पर,

$$a = 4, \quad b = 6$$ उत्तर

(ii) दी गई समीकरण,

या $$4x - 3y = 6$$

या $$\frac{4x}{6} - \frac{3y}{6} = \frac{6}{6}$$

या $$\frac{2x}{3} - \frac{y}{2} = 1$$

या $\quad \frac{2x}{3} + \frac{y}{-2} = 1$ की तुलना $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ से करने पर,

$$a = \frac{3}{2}, \quad b = -2$$ उत्तर

(iii) दी गई समीकरण,

$$3y + 2 = 0$$

या $$3y = -2$$

या $$\frac{3y}{-2} = 1$$

या $\dfrac{y}{-2/3}+\dfrac{0\cdot x}{0}=1$ की तुलना $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ से करने पर,

$$a=0,\quad b=-\frac{2}{3}=Y$$

Y-अक्ष पर काटा गया अन्त:खण्ड तथा X-अक्ष पर कोई अन्तःखण्ड नहीं। उत्तर

3. निम्नलिखित समीकरणों को लम्ब रूप में परिवर्तित कीजिए। उनकी मूल बिन्दु से लाम्बिक दूरियाँ और लम्ब तथा धन X-अक्ष के बीच का कोण ज्ञात कीजिए—

(i) $x-\sqrt{3}y+8=0$ (ii) $y-2=0$ (iii) $x-y=4$

हल—(i) दी गई समीकरण,

$$x-\sqrt{3}y+8=0$$

या $$x-\sqrt{3}y=-8$$

या $$-x+\sqrt{3}y=8$$

या $$\frac{-1}{\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}}x+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}}y=\frac{8}{\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}}$$

या $$\frac{-1}{\sqrt{1+3}}x+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1+3}}y=\frac{8}{\sqrt{1+3}}$$

या $$\frac{-1}{\sqrt{4}}x+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}y=\frac{8}{\sqrt{4}}$$

या $$\frac{-1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y=\frac{8}{2}$$

या $x\cos 120°+y\sin 120°=4$ की तुलना $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ से करने पर

$$\alpha=120°;\quad p=4$$

अत: मूल बिन्दु से रेखा की लाम्बिक दूरी $(p)=4$ **मात्रक**

तथा लम्ब व X-अक्ष के बीच का कोण $(\alpha)=$ **120°** उत्तर

(ii) दी गई समीकरण,

$$y-2=0$$

या $$0x+y=2$$

या $$\frac{0x}{\sqrt{0^2+1^2}}+\frac{y}{\sqrt{0^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{0^2+1^2}}$$

या $$\frac{0x}{\sqrt{1}}+\frac{y}{\sqrt{1}}=\frac{2}{\sqrt{1}}$$

या $$0x+y=2$$

या $$\cos 90°+\sin 90°\ y=2$$

या $\quad x\cos 90° + y\sin 90° = 2$ की तुलना रेखा के लम्ब रूप

$x\cos\alpha + y\sin\alpha = P$ से करने पर,

$$P = 2 \text{ मात्रक}, \quad \alpha = 90°$$

अत: मूल बिन्दु से रेखा की लाम्बिक दूरी $p = 2$ मात्रक

तथा लम्ब का धन X-अक्ष के बीच का कोण $\alpha = 90°$ उत्तर

(iii) दी गई समीकरण,

$$x - y = 4$$

या $$\frac{x}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} + \frac{-y}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}$$

या $$\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{-y}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}}$$

या $$\cos 315° \cdot x + \sin 315° \cdot y = 2\sqrt{2}$$

या $\quad x \cdot \cos 315° + y\sin 315° = 2\sqrt{2}$ की तुलना रेख के लम्ब रूप

$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ से करने पर,

$$p = 2\sqrt{2} \text{ मात्रक}, \quad \alpha = 315°$$

अत: दी गई रेखा की मूल बिन्दु से लाम्बिक दूरी $P = 2\sqrt{2}$ मात्रक

तथा लम्ब का धन X-अक्ष के बीच का कोण $a = 315°$ उत्तर

4. बिन्दु $(-1, 1)$ की रेखा $12(x+6) = 5(y-2)$ से दूरी ज्ञात कीजिए।

हल—दी गई रेखा का समीकरण,

$$12(x+6) = 5(y-2)$$

$$12x + 72 = 5y - 10$$

या $$12x - 5y + 72 + 10 = 0$$

या $$12x - 5y + 82 = 0 \quad \ldots(1)$$

अत: रेखा (1) की बिन्दु $(-1, 1)$ से दूरी = बिन्दु $(-1, 1)$ से रेखा (1) पर डाले गए लम्ब की माप

$$P = \frac{12 \times (-1) - 5 \times 1 + 82}{\sqrt{12^2 + 52}}$$

[बिन्दु (x_1, y_1) से रेखा $ax + by + c = 0$ की लाम्बिक दूरी $(p) = \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$]

या $$P = \frac{-12 - 5 + 82}{\sqrt{144 + 25}}$$

$$= \frac{-17 + 82}{\sqrt{169}}$$

$$= \frac{65}{13}$$

$$= 5 \text{ मात्रक (इकाई)}$$

5. X-अक्ष पर बिन्दुओं को ज्ञात कीजिए, जिनकी रेखा $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$ से दूरियाँ 4 इकाई है।

हल—दी गई रेखा का समीकरण,

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$$

या $$4x+3y=12$$

या $$4x+3y-12=0 \qquad \ldots(1)$$

माना X-अक्ष पर स्थित बिन्दुओं $(a, 0)$ से रेखा (1) की दूरियाँ 4 इकाई हैं।

अतः बिन्दु $(a, 0)$ से रेखा (1) की दूरी = बिन्दु $(a, 0)$ से रेखा (1) पर डाले गए लम्ब की माप

या $$\pm 4=\frac{4\times a+3\times 0-12}{\sqrt{4^2+3^2}}$$

या $$\pm 4=\frac{4a+0-12}{\sqrt{16+9}}$$

या $$\pm 4=\frac{4a-12}{\sqrt{25}}$$

या $$\pm 4=\frac{4a-12}{5}$$

अब, यदि $$4=\frac{4a-12}{5}$$

या $$20=4a-12$$

या $$4a=20+12$$

या $$4a=32$$

या $$a=\frac{32}{4}=8$$

तथा यदि $$-4=\frac{4a-12}{5}$$

या $$-20=4a-12$$

या $$4a=-20+12$$

या $$4a=-8$$

या $$a=\frac{-8}{4}=-2$$

अतः अभीष्ट बिन्दु $= (8, 0)\ (-2, 0)$ उत्तर

6. रेखा $5x+12y-1=0$ पर मूल बिन्दु से डाले गए लम्ब की माप ज्ञात कीजिए तथा लम्ब का धन X-अक्ष से झुकाव भी ज्ञात कीजिए।

हल—दी हुई समीकरण,

$$5x+12y-1=0$$

या $$5x+12y=1$$

या $$\frac{5x}{\sqrt{5^2+12^2}}+\frac{12y}{\sqrt{5^2+12^2}}=\frac{1}{\sqrt{5^2+12^2}}$$

या $$\frac{5x}{\sqrt{25+144}}+\frac{12y}{\sqrt{25+144}}=\frac{1}{\sqrt{25+144}}$$

$$\frac{5x}{\sqrt{169}}+\frac{12y}{\sqrt{169}}=\frac{1}{\sqrt{169}}$$

या $$\frac{5}{13}x+\frac{12}{13}y=\frac{1}{13} \quad ...(1)$$

रेखा (1) की तुलना रेखा के लम्ब रूप $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ से करने पर,

$$\cos\alpha=\frac{5}{13},\ \sin\alpha=\frac{12}{13} \quad \text{तथा} \quad p=\frac{1}{13}\ \text{इकाई}$$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{12/15}{5/13}=\frac{12}{5}$$

या $$\alpha=\tan^{-1}\left(\frac{12}{5}\right)$$

अतः मूल बिन्दु से रेखा (1) पर डाले गए लम्ब की माप $(p)=\frac{1}{13}$ इकाई

तथा लम्ब का धन X-अक्ष से झुकाव $\alpha=\tan^{-1}\left(\frac{12}{5}\right)$ उत्तर

7. रेखा $x\sin\alpha+y\cos\alpha=\sin 2\alpha$ को अन्तःखण्ड रूप में व्यक्त कीजिए तथा रेखा द्वारा अक्षों के कटे अन्तःखण्ड भी ज्ञात कीजिए।

(दिया है—$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$)

हल—दी हुई समीकरण,

$$x\sin\alpha+y\cos\alpha=\sin 2\alpha$$

या $$x\sin\alpha+y\cos\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

या $$\frac{x\sin\alpha+y\cos\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}=1$$

या $$\frac{x\sin\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}+\frac{y\cos\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}=1$$

या $$\frac{x}{2\cos\alpha}+\frac{y}{2\sin\alpha}=1 \quad ...(1)$$

जो कि रेखा का अन्तःखण्ड रूप है

रेखा (1) की तुलना $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ से करने पर,

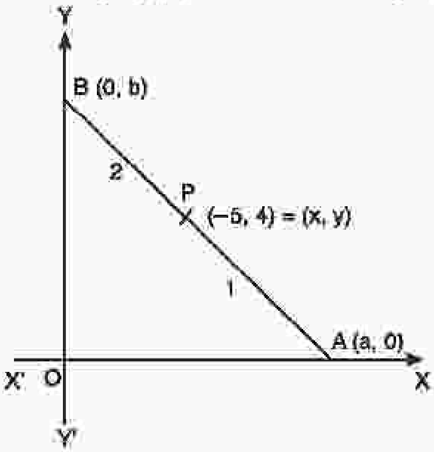
$$a = 2\cos\alpha \quad b = 2\sin\alpha$$ उत्तर

8. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (–5, 4) से जाती है तथा बिन्दु रेखा के अक्षों के मध्य कटे अन्तःखण्ड को 1 : 2 के अनुपात में विभाजित करता है।

हल—माना रेखा द्वारा X-अक्ष से कटे अन्तःखण्ड की माप $= a$ इकाई

तथा Y-अक्ष से कटे अन्तःखण्ड की माप $= b$ इकाई

अतः रेखा X-अक्ष को बिन्दु $A(a, 0)$ तथा Y-अक्ष को बिन्दु $B(0, b)$ काटेगी।



माना बिन्दु $P(x, y) = (-5, 4)$ रेखा AB को 1 : 2 के अनुपात में अन्तः विभाजित करते हैं।

अतः विभाजन के लिए,

$$m_1 = 1, \quad m_2 = 2$$

$$x_1 = a, \quad x_2 = 0, \quad y_1 = 0, \quad y_2 = b$$

$$P(x, y) = (-5, 4)$$

अतः अन्तः विभाजन सूत्र

$$P(x, y) = \left(\frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2}\right) \text{ से,}$$

या $$(-5, 4) = \left(\frac{1\times 0 + 2\times a}{1+2}, \frac{1\times b + 2\times b}{1+2}\right)$$

या $$(-5, 4) = \left(\frac{2a}{3}, \frac{b}{3}\right)$$

अतः $$\frac{2a}{3} = -5 \quad \text{तथा} \quad \frac{b}{3} = 4$$

या $$a = -\frac{15}{2}, \quad b = 12$$

अतः रेखा का अभीष्ट समीकरण

सूत्र $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ से,

$$\frac{x}{-\frac{15}{2}}+\frac{y}{12}=1$$

या $$-\frac{2x}{15}+\frac{y}{12}=1$$

या $$\frac{-8x+5y}{60}=1$$

या $$-8x+5y=60$$

या $$8x-5y+60=0$$ उत्तर

9. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (3, 2) से होकर जाती है और X-अक्ष तथा Y-अक्ष की धनात्मक दिशा में 3 : 4 के अनुपात में अन्तःखण्ड काटती है। इस रेखा पर मूल बिन्दु से डाले गए लम्ब की माप भी ज्ञात कीजिए।

हल—माना रेखा द्वारा X-अक्ष की धन दिशा में काटा गया अन्तःखण्ड $= 3a$

तब Y-अक्ष की धन दिशा में काटा गया अन्तःखण्ड $= 4a$

सूत्र $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ से

रेखा का समीकरण,

$$\frac{x}{3a}+\frac{y}{4a}=1$$

या $$4x+3y=12a \quad ...(1)$$

रेखा (1) बिन्दु (3, 2) से होकर जाती है। अतः इस बिन्दु के निर्देशांक रेखा (1) को सन्तुष्ट करेंगे।

$\therefore$ रेखा (1) में $x=3$ और $y=2$ रखने पर,

$$4\times3+3\times2=12a$$

या $$12+6=12a$$

या $$18=12a \Rightarrow a=\frac{18}{12}=\frac{3}{2}$$

a का यह मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$4x+3y=12\times\frac{3}{2}$$

या $$4x+3y=18$$

या $$4x+3y-18=0 \quad ...(2)$$ उत्तर

मूल बिन्दु (0, 0) से रेखा (2) पर डाले गए लम्ब की माप

$$p = \frac{4\times0+3\times0-18}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{-18}{\sqrt{16+9}} = -\frac{18}{\sqrt{25}} = \frac{-18}{5}$$

या $\qquad p = \frac{18}{5}$ इकाई (ऋणात्मक चिह्न छोड़ने पर) **उत्तर**

10. a और b के किन मानों के लिए समीकरण $ax+by+8=0$ और $3x-4y-12=0$ से एक ही रेखा निरूपित होगी?

हल—दी गई समीकरणें,

$$ax+by+8=0 \quad \text{तथा} \quad 3x-4y-12=0$$

या $\qquad ax+by=-8$ तथा $3x-4y=12$

या $$\frac{ax}{-8}+\frac{by}{-8}=1 \qquad ...(1)$$

तथा $$\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1 \qquad ...(2)$$

समीकरण (1) व (2) एक ही रेखा निरूपित करती हैं। अतः समीकरण (1) व (2) की तुलना करने पर।

$$\frac{a}{-8}=\frac{1}{4} \quad \text{तथा} \quad \frac{b}{-8}=\frac{1}{-3}$$

या $$a=\frac{-8}{4} \quad \text{तथा} \quad b=\frac{-8}{-3}$$

या $$a=-2 \quad \text{तथा} \quad b=\frac{8}{3}$$ **उत्तर**

11. रेखा $3x-\sqrt{3}y+7=0$ को अन्तःखण्ड रूप में परिवर्तित कीजिए।

हल—दी गई रेखा का समीकरण,

$$3x-\sqrt{3}y+7=0$$

या $$3x-\sqrt{3}y=-7$$

या $$\frac{3}{-7}x\frac{-\sqrt{3}}{-7}y=1$$

या $$\frac{x}{\frac{-7}{3}}+\frac{y}{\frac{7}{\sqrt{3}}}=1$$ **जो कि रेखा का अभीष्ट अन्तःखण्ड रूप है।**

उत्तर

12. निम्नलिखित समीकरणों को लम्ब रूप में परिवर्तित कीजिए—

(i) $x+y+3=0$ **(ii)** $x+2=0$ **(iii)** $x-\sqrt{3}y+6=0$

हल—(i) दी गई समीकरण,

$$x+y+3=0$$

या $$x+y=-3$$

या $$-x-y=3$$

या $$\frac{-x}{\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}}+\frac{y}{\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}}=\frac{3}{\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}}$$

या $$-\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{y}{\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$$

या $$x\cos 225^\circ+y\sin 225^\circ=\frac{3}{\sqrt{2}} \quad \left[\because \cos 225^\circ=-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \sin 225^\circ=-\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

जो कि रेखा का लम्ब रूप है। **उत्तर**

(ii) दी गई समीकरण,

$$x+2=0$$

या $$-x=2$$

या $$-x+0\cdot y=2$$

$\Rightarrow$ $$\frac{-x}{\sqrt{(-1)^2+0^2}}+\frac{0\cdot y}{\sqrt{(-1)^2+0^2}}=\frac{2}{\sqrt{(-1)^2+0^2}}$$

या $$-x+0\cdot y=2$$

या $$x\cos 180^\circ+y\sin 180^\circ=2 \quad [\because \cos 180^\circ=-1,\ \sin 180^\circ=0]$$

जो कि रेखा का लम्ब रूप है। **उत्तर**

(iii) दी गई समीकरण,

$$x-\sqrt{3}y+6=0$$

या $$-x+\sqrt{3}y=6$$

या $$\frac{-x}{\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}}+\frac{\sqrt{3}y}{\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}}=\frac{6}{\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}}$$

या $$\frac{-x}{\sqrt{1+3}}+\frac{\sqrt{3}y}{\sqrt{1+3}}=\frac{6}{\sqrt{1+3}}$$

या $$-\frac{x}{\sqrt{4}}+\frac{\sqrt{3}y}{\sqrt{4}}=\frac{6}{\sqrt{4}}$$

या $$-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y=\frac{6}{2}$$

या $x\cos 120^\circ+y\sin 120^\circ=3$ **जो कि रेखा का लम्ब रूप है।** **उत्तर**

13. यदि बिन्दु (3, –5) तथा (2, 4) रेखा $y=mx+c$ पर स्थित हों, तो m और c के मान ज्ञात कीजिए।

हल—दी गई रेखा का समीकरण,

$$y = mx + c \qquad \ldots(1)$$

बिन्दु (3, –5) तथा (2, 4) रेखा (1) पर स्थित है। अतः ये दोनों बिन्दु रेखा (1) को सन्तुष्ट करेंगे।

∴ समीकरण (1) में $x = 3$, $y = -5$ रखने पर,

$$-5 = 3m + c$$

या $$c = -3m - 5 \qquad \ldots(2)$$

अब समीकरण (1) में $x = 2$ तथा $y = 4$ रखने पर,

$$4 = 2m + c$$

या $$c = 4 - 2m \qquad \ldots(3)$$

समीकरण (1) व (3) से,

$$-3m - 5 = 4 - 2m$$

या $$-5 - 4 = 3m - 2m$$

या $$-9 = m \Rightarrow m = -9$$

समीकरण (3) में m का मान रखने पर,

$$c = 4 - 2 \times (-9)$$

$$= 4 + 18 = 22$$

अतः $$m = 9 \quad \text{तथा} \quad c = 22$$ उत्तर

14. एक रेखा का समीकरण $5x - 12y + 26 = 0$ है। इस समीकरण को लम्बरूप में व्यक्त कीजिए।

हल—दी हुई रेखा का समीकरण,

$$5x - 12y + 26 = 0$$

या $$-5x + 12y = 26$$

या $$\frac{-5x}{\sqrt{(-5)^2 + (12)^2}} + \frac{12y}{\sqrt{(-5)^2 + (12)^2}} = \frac{26}{\sqrt{(-5)^2 + (12)^2}}$$

या $$\frac{-5x}{\sqrt{25 + 144}} + \frac{12y}{\sqrt{25 + 144}} = \frac{26}{\sqrt{25 + 144}}$$

या $$\frac{-5x}{\sqrt{169}} + \frac{12y}{\sqrt{169}} = \frac{26}{\sqrt{169}}$$

या $$\frac{-5x}{13} + \frac{12y}{13}y = \frac{26}{13}$$

या $$\frac{-5x}{13} + \frac{12y}{13}y = 2$$ जो कि रेखा का लम्ब रूप है।

उत्तर

15. रेखा $x\cos 60^\circ + y\sin 60^\circ = 7$ का X-अक्ष से झुकाव तथा रेखा की मूल बिन्दु से दूरी ज्ञात कीजिए।

हल—दी हुई रेखा का समीकरण,

$x\cos 60^\circ + y\sin 60^\circ = 7$ की तुलना रेखा के लम्ब रूप

$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ से करने पर,

$$\alpha = 60^\circ \quad \text{तथा} \quad p = 7$$

अतः रेखा का X-अक्ष से झुकाव $= 90^\circ + \alpha = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$

तथा रेखा की मूल बिन्दु से दूरी $= p = 7$ इकाई **उत्तर**

16. रेखा $3x - y\sqrt{3} + 7 = 0$ का X-अक्ष की धन दिशा के साथ बना कोण ज्ञात कीजिए।

हल—दी हुई रेखा का समीकरण,

$$3x - y\sqrt{3} + 7 = 0$$

या $$y\sqrt{3} = 3x + 7$$

या $$y = \frac{3x}{\sqrt{3}} + \frac{7}{\sqrt{3}}$$

या $y = \sqrt{3}x + \dfrac{7}{\sqrt{3}}$ की तुलना रेखा के प्रवणता $y = mx + c$ रूप से करने पर,

$$m = \sqrt{3}$$

या $$\tan\theta = \sqrt{3} \qquad [\because m = \tan\theta]$$

या $$\tan\theta = \tan 60^\circ$$

या $$\theta = 60^\circ$$

अतः रेखा का X-अक्ष की धन दिशा के साथ बना कोण $= 60^\circ$ **उत्तर**

अभ्यास 14.5

1. निम्नलिखित रेखा-युग्मों के प्रतिच्छेद बिन्दु ज्ञात कीजिए—

(i) $3x + 2y = 8$ **तथा** $5x - 11y + 1 = 0$

(ii) $9x - 10y = 12$ **तथा** $8y - 3 = 0$

(iii) $y = \sqrt{3}x + 8$ **तथा** $x + \sqrt{3}y = 12$

हल— (i) दिए गए रेखा-युग्म समीकरण,

$$3x + 2y = 8 \qquad \ldots(1)$$

तथा $$5x - 11y + 1 = 0$$

या $$5x - 11y = -1 \qquad \ldots(2)$$

समीकरण (1) में 11 तथा समीकरण (2) में 2 से गुणा करके जोड़ने पर,

$$43x = 86$$

या $$x=\frac{86}{43}=2$$

x का मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$3\times2+2y=8$$

या $$6+2y=8$$

या $$2y=8-6$$

या $$2y=2$$

या $$y=\frac{2}{2}=1$$

$\therefore$ प्रतिच्छेद बिन्दु $(x, y)=(2, 1)$ उत्तर

(ii) दिए गए रेखा-युग्म समीकरण,

$$9x-10y=12 \quad \ldots(1)$$

तथा $$8y-3=0$$

या $$y=\frac{3}{8} \quad \ldots(2)$$

समीकरण (2) से y का मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$9x-10\times\frac{3}{8}=12$$

या $$9x-\frac{15}{4}=12$$

या $$9x=12+\frac{15}{4}$$

या $$9x=\frac{48+15}{4}$$

या $$9x=\frac{63}{4}$$

या $$x=\frac{63}{4\times9}=\frac{7}{4}$$

$\therefore$ प्रतिच्छेद बिन्दु $(x, y)=\left(\frac{7}{4}, \frac{3}{8}\right)$ उत्तर

(iii) दिए गए रेखा-युग्म समीकरण,

$$y=\sqrt{3}x+8 \quad \ldots(1)$$

तथा $$x+\sqrt{3}y=12 \quad \ldots(2)$$

समीकरण (1) से y का मान समीकरण (2) में रखने पर,

$$x+\sqrt{3}(\sqrt{3}x+8)=12$$

या $\quad x+3x+8\sqrt{3}=12$

या $\quad 4x=12-8\sqrt{3}$

या $\quad 4x=4(3-2\sqrt{3})$

या $\quad x=\dfrac{4(3-2\sqrt{3})}{4}$

$=3-2\sqrt{3}$

x का यह मान समीकरण (1) में रखने पर,

$y=\sqrt{3}(3-2\sqrt{3})+8$

या $\quad y=3\sqrt{3}-6+8$

$=3\sqrt{3}+2$

$\therefore$ प्रतिच्छेद बिन्दु $(x, y)=(3-2\sqrt{3},\ 3\sqrt{3}+2)$ **उत्तर**

2. रेखा $4x+5y=20$ के निर्देशांक्षों के साथ प्रतिच्छेद बिन्दुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल—दी गई रेखा का समीकरण,

$4x+5y=20$

या $\quad \dfrac{x}{5}+\dfrac{y}{4}=1$

जो कि रेखा के अन्तःखण्ड रूप $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ के समान है।

जहाँ $\quad a=5,\ b=4$

अतः रेखा द्वारा X-अक्ष पर प्रतिच्छेद बिन्दु **(5, 0)** तथा Y-अक्ष पर प्रतिच्छेद बिन्दु **(0, 4)** है। **उत्तर**

3. बिन्दुओं (4, – 5) तथा (–3, 7) से होकर जाने वाली रेखा के लम्बवत् रेखा निकाय की प्रवणता ज्ञात कीजिए।

हल—माना $\quad P(x_1, y_1)=(4,-5)$

तथा $\quad Q(x_2, y_2)=(-3, 7)$

बिन्दु P व Q से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण,

सूत्र $\quad y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$ से,

$y-(-5)=\dfrac{7-(-5)}{-3-4}(x-4)$

या $\quad y+5=\dfrac{7+5}{-7}(x-4)$

या $\quad y+5=\dfrac{-12}{7}(x-4)$

या $$y+5=\frac{-12}{7}x+\frac{48}{7}$$

या $$y=\frac{-12}{7}x+\frac{48}{7}-5$$

या $$y=\frac{-12}{7}x+\frac{13}{7} \quad \ldots(1)$$

रेखा (1) की तुलना $y=mx+c$ से करने पर,

रेखा (1) की प्रवणता $m=-\frac{12}{7}$

माना रेखा (1) के लम्बवत् रेखा की प्रवणता m' है। तब

$$mm'=-1$$

या $$\frac{-12}{7}m'=-1$$

या $$m'=\frac{-7}{-12} \quad \Rightarrow \quad m'=\frac{7}{12}$$

अतः दी हुई रेखा के लम्बवत् रेखा की प्रवणता $=\frac{7}{12}$ उत्तर

4. सिद्ध कीजिए कि रेखाएँ $3x+4y=5$ तथा $12x+16y=8$ समान्तर हैं।

हल—दी गई रेखाएँ

$$3x+4y=5 \quad \ldots(1)$$

तथा $$12x+16y=8 \quad \ldots(2)$$

$$\text{समीकरण (1) की प्रवणता } (m_1)=-\frac{x \text{ का गुणांक}}{y \text{ का गुणांक}}$$

या $$m_1=-\frac{3}{4}$$

$$\text{इसी प्रकार रेखा (2) की प्रवणता } (m_2)=-\frac{x \text{ का गुणांक}}{y \text{ का गुणांक}}$$

या $$m_2=-\frac{12}{16}$$

या $$m_2=-\frac{3}{4}$$

$$m_1=m_2$$

∴ रेखा (1) व (2) परस्पर समान्तर हैं। **इति सिद्धम्**

5. रेखाओं $3x+4y=7$ और $x-2y+1=0$ के प्रतिच्छेद बिन्दु से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए, जिस पर मूल बिन्दु स्थित हो।

हल—दी गई रेखाओं के समीकरण,

$$3x+4y=7 \qquad ...(1)$$

तथा $$x-2y+1=0$$

या $$x-2y=-1 \qquad ...(2)$$

समीकरणों (2) में 2 से गुणा करने पर,

$$2x-4y=-2 \qquad ...(3)$$

समीकरण (1) व (3) को जोड़ने पर,

$$5x=5$$

या $$x=\frac{5}{5}=1$$

x का मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$3\times 1+4y=7$$

या $$3+4y=7$$

या $$4y=7-3$$

या $$4y=4$$

या $$y=\frac{4}{4}=1$$

अत: समीकरण (1) व (2) का प्रतिच्छेद बिन्दु = (1, 1)

हमें उस रेखा का समीकरण ज्ञात करना है जो बिन्दु (1, 1) से होकर जाती है तथा जिस पर मूल बिन्दु बिन्दु स्थित है अर्थात् बिन्दु (1, 1) व मूल बिन्दु (0, 0) से हो जाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात करना है।

सूत्र $$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_1-x_1}(x-x_1) \text{ से}$$

$$y-1=\frac{0-1}{0-1}(x-1)$$

या $$y-1=\frac{-1}{-1}(x-1)$$

या $$y-1=x-1$$

या $$x-y+1-1=0 \Rightarrow x-y=0$$ उत्तर

6. ज्ञात कीजिए कि k के किस मान के लिए रेखाएँ $y=x+1$, $y=2x+2$ और $y=kx+3$ संगामी होंगी?

हल—दी गई रेखाओं के समीकरण,

$$y=x+1 \qquad ...(1)$$

$$y=2x+2 \qquad ...(2)$$

$$y=kx+3 \qquad ...(3)$$

समीकरण (1) व (2) को हल करने के लिए y के मानों की तुलना करने पर,

$$x+1=2x+2$$

या $$x-2x=2-1$$

या $$-x=1$$

या $$x=-1$$

x का यह मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$y=-1+1=0$$

अत: रेखा (1) व (2) का प्रतिच्छेद बिन्दु $(-1, 0)$ है।

दी गई तीनों रेखाओं के संगामी होने के लिए रेखा (3) $y=kx+3$ बिन्दु $(-1, 0)$ से होकर जाएगी।

अतः $$0=k(-1)+3$$

या $$0=-k+3$$

या $$k=3$$ उत्तर

7. निम्नलिखित रेखा-युग्मों के बीच के कोण ज्ञात कीजिए—

(i) $3x+2y+7=0$ **तथा** $2x-3y+5=0$

(ii) $y=\sqrt{3}x$ **तथा** $y=-\dfrac{x}{\sqrt{3}}$

(iii) $y=x$ **तथा** $y=-x$

(iv) $y=4x+5$ **तथा** $y=-3x+7$

हल— (i) दिया गया रेखा-युग्म,

$$3x+2y+7=0 \quad \ldots(1)$$

$$2x-3y+5=0 \quad \ldots(2)$$

रेखा (1) की प्रवणता $(m_1)=-\dfrac{x \text{ का गुणांक}}{y \text{ का गुणांक}}$

अतः $$m_1=-\frac{3}{2}$$

रेखा (2) की प्रवणता $(m_2)=-\dfrac{x \text{ का गुणांक}}{y \text{ का गुणांक}}$

अतः $$m_2=-\frac{2}{-3}$$

या $$m_2=\frac{2}{3}$$

माना दोनों रेखाओं के बीच का कोण α है।

अत: दोनों रेखाओं के बीच का कोण सूत्र $\tan\alpha=\dfrac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$ से,

$$\tan\alpha = \frac{\frac{-3}{2}+\frac{2}{3}}{1+\frac{-3}{2}\times\frac{2}{3}}$$

या $$\tan\alpha = \frac{\frac{-3}{2}+\frac{2}{3}}{1-1} = \frac{-\frac{3}{2}+\frac{2}{3}}{0}$$

या $$\tan\alpha = \infty$$

या $$\tan\alpha = \tan 90^\circ$$

या $$\alpha = 90^\circ$$ उत्तर

(ii) दिया हुआ रेखा-युग्म,

$$y = \sqrt{3}x$$

या $$y-\sqrt{3}x = 0 \qquad \ldots(1)$$

तथा $$y = -\frac{x}{\sqrt{3}}$$

या $$\frac{x}{\sqrt{3}}+y = 0 \qquad \ldots(2)$$

$$\text{रेखा (1) की प्रवणता } m_1 = -\frac{x \text{ का गुणांक}}{y \text{ का गुणांक}}$$

$$m_1 = \frac{-(-\sqrt{3})}{1} = \sqrt{3}$$

$$\text{रेखा (2) की प्रवणता } (m_2) = -\frac{x \text{ का गुणांक}}{y \text{ का गुणांक}}$$

$$= -\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{1} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

माना दोनों रेखाओं के बीच का कोण α है।

सूत्र $$\tan\alpha = \frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$$ से,

$$\tan\alpha = \frac{\sqrt{3}-\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{1+\sqrt{3}\times\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}$$

या $$\tan\alpha = \frac{\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-1}$$

या $$\tan\alpha=\frac{\frac{3+1}{\sqrt{3}}}{0}$$

या $$\tan\alpha=\infty$$

या $$\tan\alpha=\tan 90^\circ$$

या $$\alpha=90^\circ$$ उत्तर

(iii) दिया हुआ रेखा-युग्म,

$$y=x \Rightarrow x-y=0 \quad ...(1)$$

तथा $$y=-x \Rightarrow x+y=0 \quad ...(2)$$

$$\text{रेखा (1) की प्रवणता } (m_1)=-\frac{x \text{ का गुणांक}}{y \text{ का गुणांक}}=\frac{-1}{-1}=1$$

$$\text{रेखा (2) की प्रवणता } (m_2)=-\frac{x \text{ का गुणांक}}{y \text{ का गुणांक}}=\frac{-1}{1}=-1$$

माना दोनों रेखाओं के बीच का कोण α है।

सूत्र $$\tan\alpha=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2} \text{ से}$$

$$\tan\alpha=\frac{1-(-1)}{1+1\times(-1)}$$

या $$\tan\alpha=\frac{1+1}{1-1}=\frac{2}{0}=\infty$$

या $$\tan\alpha=\tan 90^\circ \Rightarrow \alpha=90^\circ$$ उत्तर

8. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए, जो मूल बिन्दु से होकर जाती है तथा रेखा $3x+7y+11=0$ के समान्तर है।

हल—दी गई रेखा का समीकरण,

$$3x+7y+11=0 \quad ...(1)$$

रेखा (1) के समान्तर रेखा का समीकरण,

$$3x+7y=\lambda \quad ...(2)$$

[रेखा $ax+by+c=0$ के समान्तर रेखा का समीकरण $ax+by=\lambda$ होता है।]

रेखा (2) मूल बिन्दु (0, 0) से होकर जाती है। अत: यह बिन्दु रेखा (2) को सन्तुष्ट करेगा,

अत: $$3\times0+7\times0=\lambda$$

या $0+0=\lambda \Rightarrow \lambda=0$ समीकरण (2) में रखने पर,

रेखा का अभीष्ट समीकरण

$$3x+7y=0$$ उत्तर

9. बिन्दु (3, 4) से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए, जो रेखा $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$ पर लम्ब है।

हल—दी हुई रेखा का समीकरण,

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$$

या $$3x+4y=12 \quad \ldots(1)$$

रेखा (1) के लम्ब रेखा का समीकरण,

$$4x-3y=\lambda \quad \ldots(2)$$

प्रश्नानुसार, रेखा (2) बिन्दु (3, 4) से होकर जाती है। अतः यह बिन्दु रेखा (2) को सन्तुष्ट करेगा।

$\therefore$ $$4\times3-3\times4=\lambda$$

या $$12-12=\lambda \Rightarrow \lambda=0$$

अतः रेखा का अभीष्ट समीकरण $4x-3y=0$ **उत्तर**

10. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ तथा $\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1$ के प्रतिच्छेद बिन्दु से होकर जाने वाली उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जिस पर मूल बिन्दु स्थित है।

हल—दी गई रेखाओं के समीकरण,

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \quad \ldots(1)$$

$$\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1 \quad \ldots(2)$$

समीकरण (1) में b की गुणा तथा समीकरण (2) में a की गुणा करने पर,

$$\frac{b}{a}x+y=b \quad \ldots(3)$$

तथा $$\frac{a}{b}x+y=a \quad \ldots(4)$$

समीकरण (3) में से समीकरण (4) घटाने पर,

$$\left(\frac{b}{a}-\frac{a}{b}\right)x=b-a$$

या $$\left(\frac{b^2-a^2}{ab}\right)x=(b-a)$$

या $$\frac{(b+a)(b-a)}{ab}x=(b-a)$$

या $$x=\frac{(b-a)\times ab}{(b+a)(b-a)}$$

या $$x = \frac{ab}{b+a}$$

x का यह मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$\frac{1}{a} \times \frac{ab}{(b+a)} + \frac{y}{b} = 1$$

या $$\left(\frac{b}{b+a}\right) + \frac{y}{b} = 1$$

या $$\frac{y}{b} = 1 - \frac{b}{b+a}$$

या $$\frac{y}{b} = \frac{b+a-b}{b+a}$$

या $$\frac{y}{b} = \frac{a}{b+a}$$

या $$y = \frac{ab}{b+a}$$

अतः रेखा (1) व (2) का प्रतिच्छे बिन्दु $= \left(\frac{ab}{a+b}, \frac{ab}{a+b}\right)$

बिन्दु $\left(\frac{ab}{a+b}, \frac{ab}{a+b}\right)$ व मूल बिन्दु (0, 0) से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण सूत्र

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \text{ से,}$$

अतः $$y - \frac{ab}{a+b} = \frac{\left(0 - \frac{ab}{a+b}\right)}{\left(0 - \frac{ab}{a+b}\right)}\left(x - \frac{ab}{a+b}\right)$$

या $$y - \frac{ab}{a+b} = x - \frac{ab}{a+b}$$

या $$y = x$$ उत्तर

11. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए, जो रेखाओं $3x - y = 3$ और $4x + y = 11$ के प्रतिच्छेद बिन्दु से होकर जाती है और X-अक्ष से 45° का कोण बनाती है।

हल—दी गई रेखाओं के समीकरण,

$$3x - y = 3 \quad \text{....(1)}$$

$$4x + y = 11 \quad \text{...(2)}$$

समीकरण (1) व (2) का जोड़ने पर,

$$7x = 14$$

या $$x = 2$$

x का मान समीकरण (2) में रखने पर,

$$4\times 2+y=11$$

या $\quad 8+y=11$ या $y=11-8$

या $\quad y=3$

अतः दी गई रेखाओं (1) व (2) का प्रतिच्छेद बिन्दु $=(2, 3)$

प्रश्नानुसार, रेखा का X-अक्ष कोण $=45°=\theta$

अतः रेखा की प्रवणता $(m)=\tan\theta$

या $\quad m=\tan 45°$

या $\quad m=1$

बिन्दु (2, 3) से होकर जाने वाली तथा प्रवणता $(m=1)$ वाली रेखा का समीकरण, सूत्र $y-y_1=m(x-x_1)$ से,

$$y-3=1\times(x-2)$$

या $\quad y-3=x-2$

या $\quad y=x-2+3$

या $\quad y=x+1$

या $\quad x-y+1=0$ उत्तर

12. रेखा $ax-3y=13$ में a का मान ज्ञात कीजिए जबकि यह रेखा $2x+6y=9$ के समान्तर है।

हल—दी गई रेखाएँ,

$$ax-3y=13 \quad \ldots(1)$$

$$2x+6y=9 \quad \ldots(2)$$

रेखा (1) की प्रवणता $(m_1)=-\dfrac{x \text{ का गुणांक}}{y \text{ का गुणांक}}=\dfrac{-a}{-3}=\dfrac{a}{3}$

रेखा (2) की प्रवणता $(m_2)=-\dfrac{x \text{ का गुणांक}}{y \text{ का गुणांक}}$

$$=-\frac{2}{6}=-\frac{1}{3}$$

प्रश्नानुसार, रेखा (1) व (2) परस्पर समान्तर है।

अतः $\quad m_1=m_2$

या $\quad \dfrac{a}{3}=-\dfrac{1}{3}$

या $\quad a=-1$ उत्तर

13. यदि समीकरण $ax = by + c = 0$ तथा $px + qy + r = 0$ दो समान्तर रेखाओं को निरूपित करें तो सिद्ध कीजिए — $aq = bp$

हल—दी गई रेखाओं के समीकरण,

$$ax + by + c = 0 \qquad ...(1)$$

$$px + qy + r = 0 \qquad ...(2)$$

रेखा (1) की प्रवणता $(m_1) = -\dfrac{x \text{ का गुणांक}}{y \text{ का गुणांक}}$

या $$m_1 = -\frac{a}{b}$$

रेखा (2) की प्रवणता $(m_2) = -\dfrac{x \text{ का गुणांक}}{y \text{ का गुणांक}}$

या $$m_2 = -\frac{p}{q}$$

प्रश्नानुसार, रेखा (1) व (2) दो समान्तर रेखाओं को निरूपित करती हैं।

$\therefore$ $$m_1 = m_2$$

या $$-\frac{a}{b} = -\frac{p}{q}$$

या $$\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$$

या $$aq = bp$$ **इति सिद्धम्**

14. यदि रेखाएँ $y = mx + c$ तथा $4x - y + 3 = 0$ परस्पर लम्ब हैं तो m का मान ज्ञात कीजिए।

हल—दी गई रेखाओं के समीकरण,

$$y = mx + c \qquad ...(1)$$

तथा $$4x - y + 3 = 0 \qquad ...(2)$$

रेखा (1) की प्रवणता $(m_1) = m$

तथा रेखा (2) की प्रवणता $(m_2) = -\dfrac{x \text{ का गुणांक}}{y \text{ का गुणांक}}$

$$= -\frac{4}{-1} = 4$$

प्रश्नानुसार, रेखा (1) व (2) परस्पर लम्ब हैं।

अतः $$m_1 m_2 = -1$$

या $$m \times 4 = -1$$

या $$m = \frac{-1}{4}$$ **उत्तर**

15. मूल बिन्दु से होकर जाने वाली तथा रेखा $2x-3y+8=0$ पर लम्ब रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल—दी गई रेखा का समीकरण,

$$2x-3y+8=0 \quad \ldots(1)$$

रेखा (1) के लम्ब रेखा का समीकरण,

$$3x+2y=\lambda$$

प्रश्नानुसार, रेखा (2) मूलबिन्दु (0,0) से होकर जाती है।

अतः $3\times 0+2\times 0=\lambda$

या $0-10=\lambda \Rightarrow =0$ यह मान रेखा (2) में रखने पर,

रेखा का अभीष्ट समीकरण $3x+2y=0$ उत्तर

16. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए, जो रेखाओं $3x+5y+2=0$ और $2x-7y-9=0$ के प्रतिच्छेद बिन्दु से होकर जाती है और रेखा $9x-4y+15=0$ पर लम्ब है।

हल—दी गई रेखाओं के समीकरण,

$$3x+5y+2=0 \quad \ldots(1)$$

$$2x-7y-9=0 \quad \ldots(2)$$

समीकरण (1) में 7 तथा समीकरण (2) में 5 की गुणा करने पर,

$$21x+35y+14=0 \quad \ldots(3)$$

$$10x-35y-45=0 \quad \ldots(4)$$

समीकरण (3) व (4) जोड़ने पर,

$$31x-31=0$$

या $31x=31$

या $x=1$ यह मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$3\times 1+5y+2=0$$

या $3+5y+2=0$

या $5+5y=0$

या $5y=-5$

या $y=-1$

अतः रेखा (1) व (2) का प्रतिच्छेद बिन्दु $=(1,-1)$

दी गई तीसरी रेखा $9x-4y+15=0$ के लम्ब रेखा का समीकरण,

$$4x+9y=\lambda \quad \ldots(5)$$

प्रश्नानुसार, रेखा (5) प्रतिच्छेद बिन्दु $(1,-1)$ से होकर जाती है।

अतः $4\times 1+9\times(-1)=\lambda$

या $4-9=\lambda \Rightarrow -5=\lambda$

या $\lambda = -5$

λ का मान समीकरण 3 में रखने पर, अभीष्ट रेखा का समीकरण,

$$4x+9y=-5$$

या $4x+9y+5=0$ उत्तर

17. यदि समीकरण $lx+my+n=0$ तथा $px+qy+r=0$ दो समान्तर रेखाओं के युग्म को निरूपित करते हैं, तो सिद्ध कीजिए कि — $lq-mp=0$

हल—दी गई रेखाओं के समीकरण,

$$lx+my+n=0 \quad \ldots(1)$$

$$px+qy+r=0$$

रेखा (1) की प्रवणता $(m_1) = -\dfrac{x \text{ का गुणांक}}{y \text{ का गुणांक}} = -\dfrac{l}{m}$

तथा रेखा (2) की प्रवणता $(m_2) = -\dfrac{x \text{ का गुणांक}}{y \text{ का गुणांक}} = -\dfrac{p}{q}$

रेखा (1) व (2) समान्तर रेखाओं के युग्म को निरूपित करती हैं।

$\therefore$ $m_1 = m_2$

या $\dfrac{-l}{m} = \dfrac{-p}{q}$

या $\dfrac{l}{m} = \dfrac{p}{q}$

या $lq = pm \Rightarrow lq = mp$

या $lq - mp = 0$ इति सिद्धम्

18. सिद्ध कीजिए कि बिन्दुओं (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) से होकर जाने वाली रेखा की मूल-बिन्दु से दूरी $\dfrac{x_1y_2 - x_2y_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}$ है।

हल—दिए हुए बिन्दु (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण,

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

या $(x_2 - x_1)y - (x_2 - x_1)y_1 = (y_2 - y_1)x - (y_2 - y_1)x_1$

या $(y_2 - y_1)x - (y_2 - y_1)x_1 = (x_2 - x_1)y - (x_2 - x_1)y_1$

या $(y_2 - y_1)x - (x_2 - x_1)y + (x_2 - x_1)y_1 - (y_2 - y_1)x_1 = 0$

या $(y_2 - y_1)x - (x_2 - x_1)y + x_2y_1 - x_1y_1 - x_1y_2 + x_1y_1 = 0$

या $(y_1 - y_1)x - (x_2 - x_1)y + x_2y_1 - x_1y_2 = 0$ $\ldots(1)$

अतः रेखा (1) की मूल बिन्दु से दूरी $= \dfrac{x_2y_1 - x_1y_2}{\sqrt{(y_2-y_1)^2+(x_2-x_1)^2}}$

$$= \frac{x_2 y_1 + x_1 y_2}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$ इति सिद्धम्

19. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए, जो रेखा $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$ के समान्तर हो और बिन्दु (3,4) जिस पर स्थित हो।

हल—दी गई रेखा का समीकरण,

$$\frac{x}{3}+\frac{4}{y}=0$$

या $\quad 4x+3y=12 \quad \ldots(1)$

रेखा (1) के समान्तर रेखा का समीकरण

$$4x+3y=\lambda \quad \ldots(2)$$

प्रश्नानुसार, रेखा (2) बिन्दु (3,4) से होकर जाती है।

अत: $\quad 4\times3+3\times4=\lambda$

या $\quad 12+12=\lambda \Rightarrow \lambda=24$

λ का मान समीरकण (2) में रखने पर, रेखा का अभीष्ट समीकरण

$$4x+3y=24$$ उत्तर

20. मूल बिन्दु से जाने वाली उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए, जो बिन्दुओं (3,0) व (0,9) से जाने वाली रेखा के समान्तर है।

हल—माना दिए गए बिन्दु, $A(x_1, y_1)=(3,0)$

तथा $\quad B(x_2, y_2)=(0,9)$

अत: बिन्दु A व B से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण

सूत्र $y-y_1=\frac{x_2-y_1}{x_2-l_1}(x-x_1)$ से,

या $\quad y-0=\frac{9-0}{0-3}(x-3)$

या $\quad y=\frac{-9}{3}(x-3)$

या $\quad y=-3(x-3)$

या $\quad y=-3x+9$

$$3x+y-9=0 \quad \ldots(1)$$

रेखा (1) के समान्तर रेखा का समीकरण,

$$3x+y=\lambda \quad \ldots(2)$$

प्रश्नानुसार, रेखा (2) मूल बिन्दु से होकर जाती है।

अत: $\quad 3\times0+0=\lambda$

या $\quad 0+0=\lambda \Rightarrow \lambda=0$

λ का मान समीकरण (2) में रखने पर, रेखा का अभीष्ट समीकरण,

$$3x + y = 0$$

या $$y = -3x$$ उत्तर

21. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए, जो बिन्दु (–4,5) से जाती हो तथा रेखा $3x - 2y + 15 = 0$ पर लम्ब हो।

हल—दी गई रेखा का समीकरण

$$3x - 2y + 15 = 0 \quad ...(1)$$

रेखा (1) के लम्ब रेखा का समीकरण

$$2x + 3y = \lambda \quad ...(2)$$

प्रश्नानुसार, रेखा (2) बिन्दु (– 4,5) से जाती है।

अतः $$2 \times (-4) + 3 \times 5 = \lambda$$

या $$-8 + 15 = \lambda$$

या $$7 = \lambda \Rightarrow \lambda = 7$$

λ का मान समीकरण (2) में रखने पर, रेखा का अभीष्ट समीकरण

$$2x + 3y = 7$$ उत्तर

22. रेखा $3x + 5y = 9$ के समान्तर उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए, जो रेखा $2x + 3y = 8$ तथा $3x - y = 1$ के प्रतिच्छेद बिन्दु से जाती हो।

हल—दी गई रेखा का समीकरण,

$$2x + 3y = 8 \quad ...(1)$$

$$3x - y = 1 \quad ...(2)$$

समीकरण (2) में 3 से गुणा करने पर,

$$9x - 3y = 3 \quad ...(3)$$

समीकरण (1) व (3) को जोड़ने पर,

$$11x = 11$$

$$x = \frac{11}{11} = 1$$

x का मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$2 \times 1 + 3y = 8$$

या $$2 + 3y = 8$$

या $$3y = 8 - 2$$

या $$3y = 6$$

या $$y = \frac{6}{3} = 2$$

अतः रेखा (1) व (2) का प्रतिच्छेद बिन्दु = (1,2)

दी गई तीसरी रेखा $3x+5y=9$ के समान्तर रेखा का समीकरण,

$$3x+5y=\lambda \quad ...(4)$$

प्रश्नानुसार, रेखा (4), रेखा (1) व (2) के प्रतिच्छेद बिन्दु (1,2) से होकर जाती है।

अतः $3\times 1+5\times 2=\lambda$

या $3+10=\lambda$

या $13=\lambda \Rightarrow \lambda=13$

λ का मान समीकरण (4) में रखने पर, रेखा का अभीष्ट समीकरण,

$$3x+5y=13$$ उत्तर

23. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए, जो मूलबिन्दु से होकर जाती है और रेखा $5x+7y+12=0$ के समान्तर है।

हल—दी गई रेखा का समीकरण,

$$5x+7y+12=0 \quad ...(1)$$

रेखा (1) के समान्तर रेखा का समीकरण,

$$5x+7y=\lambda \quad ...(2)$$

प्रश्नानुसार, रेखा (2) मूल बिन्दु (0,0) से होकर जाती है।

अतः $5\times 0+7\times 0=\lambda$

$0+0=\lambda \Rightarrow \lambda=0$

λ का मान समीकरण (2) में रखने पर, रेखा का अभीष्ट समीकरण

$$5x+7y=0$$ उत्तर

24. बिन्दु (4,3) से होकर जाने वाली उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखा $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$ के समान्तर है।

हल—प्रश्न संख्या 19 का हल देखिए।

25. रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए, जो बिन्दु (1,–2) से होकर जाती है तथा रेखा $4x-3y=1$ पर लम्ब है।

हल—दी गई रेखा का समीकरण,

$$4x-3y=1$$

$$4x-3y-1=0 \quad ...(1)$$

रेखा (1) के लम्ब रेखा का समीकरण,

$$3x+4y=\lambda \quad ...(2)$$

प्रश्नानुसार, रेखा (2) बिन्दु (1,–2) से होकर जाती है।

अतः $3\times 1+4\times(-2)=\lambda$

या $3-8=\lambda$

या $-5=\lambda \Rightarrow \lambda=-5$

λ का मान समीकरण (2) में रखने पर,

$$3x+4y=-5$$

या $\quad 3x+4y+5=0$ **उत्तर**

26. बिन्दु (1,2) और (5,–6) को मिलाने वाली रेखा के लम्ब अर्द्धक का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल—माना दिए गए बिन्दु, $A(x_1, y_1)=(1,2)$

तथा $\quad B(x_2, y_2)=(5,-6)$

अतः बिन्दु A व B को मिलाने वाली रेखा का समीकरण

सूत्र $\quad y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_1-x_1}(x-x_1)$ से,

$$y-2=\frac{-6-2}{5-1}(x-1)$$

या $\quad y-2=\dfrac{-8}{4}(x-1)$

या $\quad y-2=-2(x-1)$

या $\quad y-2=-2x+2$

या $\quad 2x+y-2-2=0$

या $\quad 2x+y-4=0 \qquad \ldots(1)$

रेखा (1) के लम्ब रेखा का समीकरण,

$$x-2y=\lambda \qquad \ldots(2)$$

रेखा AB का मध्य बिन्दु $=\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}, \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$ से,

$$=\left(\frac{1+5}{2}, \frac{2-6}{2}\right)$$

$$=\left(\frac{6}{2}, \frac{-4}{2}\right)$$

$$=(3,-2)$$

प्रश्नानुसार, रेखा (2), बिन्दु (3,–2) से जाती है।

अतः $\quad 3-2(-2)=\lambda$

या $\quad 3+4=\lambda \Rightarrow \lambda=7$

समीकरण (2) में λ का मान रखने पर, रेखा का अभीष्ट समीकरण

$x-2y=7$ **उत्तर**

27. रेखाओं $a_1x+b_1y+c_1=0$ तथा $a_2x+b_2y+c_2=0$ के बीच का कोण α है। $\tan\alpha$ व $\cot\alpha$ का मान ज्ञात कीजिए। यदि रेखाएँ परस्पर लम्ब हैं तो सिद्ध कीजिए $a_1a_2+b_1b_2=0$

हल—दी गई रेखाओं के समीकरण,

$$a_1x+b_1y+c_1=0 \quad \ldots(1)$$

तथा
$$a_2x+b_2y+c_2=0 \quad \ldots(2)$$

रेखा (1) की प्रवणता $(m_1)=-\dfrac{x \text{ का गुणांक}}{y \text{ का गुणांक}}=-\dfrac{a_1}{b_1}$

रेखा (2) की प्रवणता $(m_2)=-\dfrac{x \text{ का गुणांक}}{y \text{ का गुणांक}}=-\dfrac{a_2}{b_2}$

रेखा (1) व (2) के बीच का कोण $=\alpha$

$\therefore$
$$\tan\alpha=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$$

या
$$\tan\alpha=\frac{-\frac{a_1}{b_1}-\left(-\frac{a_2}{b_2}\right)}{1+\left(-\frac{a_1}{b_1}\right)\left(-\frac{a_2}{b_2}\right)}$$

$$\tan\alpha=\frac{\frac{a_2}{b_2}-\frac{a_1}{b_1}}{1+\frac{a_1a_2}{b_1b_2}}$$

$$\tan\alpha=\frac{\frac{a_2b_1-a_1b_2}{b_1b_2}}{\frac{b_1b_2+a_1a_2}{b_1b_2}}$$

या
$$\tan\alpha=\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_1a_2+b_1b_2}$$ उत्तर

हम जानते हैं कि—

$$\cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}$$

अतः
$$\cot\alpha=\frac{1}{\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_1a_2+b_1b_2}}$$

या
$$\cot\alpha=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2b_1-a_1b_2}$$ उत्तर

यदि रेखा (1) व (2) परस्पर लम्ब हों, तो

$$m_1m_2=-1$$

या $$-\frac{a_1}{b_1}\times\left(-\frac{a_2}{b_2}\right)=-1$$

या $$\frac{a_1a_2}{b_1b_2}=-1$$

या $$a_1a_2=-b_1b_2$$

या $$a_1a_2+b_1b_2=0$$ इति सिद्धम्

28. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए, जो बिन्दु (1, –1) से होकर जाती है तथा रेखा $3x+4y+5=0$ पर लम्ब है।

हल—दी गई रेखा का समीकरण,

$$3x+4y+5=0 \quad \ldots(1)$$

रेखा (1) के लम्ब रेखा का समीकरण,

$$4x-3y=\lambda \quad \ldots(2)$$

रेखा (2) बिन्दु (1, –1) से होकर जाती है। अतः यह बिन्दु रेखा (2) को सन्तुष्ट करेगा।

$\therefore$ $$4\times1-3\times(-1)=\lambda$$

या $$4+3=\lambda \Rightarrow \lambda=7$$

λ का यह मान समीकरण (3) में रखने पर,

$$4x-3y=7$$ उत्तर

29. सिद्ध कीजिए कि बिन्दु $(a\cos^3\alpha, a\sin^3\alpha)$ से होकर जाने वाली और रेखा $a\tan\alpha+y=a\sin\alpha$ पर लम्ब रेखा का समीकरण $x\cos\alpha-y\sin\alpha=a\cos2\alpha$ है

हल—दी हुई रेखा का समीकरण,

$$x\tan\alpha+y=a\sin\alpha$$

या $$x\tan\alpha+y-a\sin\alpha=0 \quad \ldots(1)$$

रेखा (1) के लम्ब रेखा का समीकरण,

$$x-y\tan\alpha=\lambda \quad \ldots(2)$$

प्रश्नानुसार, रेखा (2) बिन्दु $(a\cos^3\alpha, \sin^3\alpha)$ से होकर जाती है। अतः यह बिन्दु रेखा (2) को सन्तुष्ट करेगा।

$\therefore$ $$a\cos^3\alpha-a\sin^3\alpha\tan\alpha=\lambda$$

या $$a\cos^3\alpha-\frac{a\sin^3\alpha\sin\alpha}{\cos\alpha}=\lambda$$

य $$\frac{a\cos^4\alpha-a\sin^4\alpha}{\cos\alpha}=\lambda$$

या $$\lambda=\frac{a\cos^4\alpha-\sin^4\alpha}{\cos\alpha}$$

या $$\lambda=\frac{a(\cos^4\alpha-\sin^4\alpha)}{\cos\alpha}$$

या $$\lambda=\frac{a\{(\cos^2\alpha)^2-(\sin^2\alpha)^2\}}{\cos\alpha}$$

या $$\lambda=\frac{a(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)}{\cos\alpha}$$

या $$\lambda=\frac{a\times 1\times\cos 2\alpha}{\cos\alpha}$$

या $$\lambda=\frac{a\cos 2\alpha}{\cos\alpha}$$

λ का यह मान समीकरण (2) में रखने पर,

$$x-y\tan\alpha=\frac{a\cos 2\alpha}{\cos\alpha}$$

या $$x\cos\alpha-y\tan\alpha.\cos\alpha=a\cos 2\alpha$$

या $$x\cos\alpha-y\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.\cos\alpha=a\cos 2\alpha$$

या $$x\cos\alpha-y\sin\alpha=a\cos 2\alpha$$ **इति सिद्धम्**

30. सिद्ध कीजिए कि बिन्दु $(a\cos^3\beta, a\sin^3\beta)$ से होकर जाने वाली तथा रेखा $x\sec\beta+y\,\mathrm{cosec}\,\beta=a$ पर लम्ब रेखा का समीकरण $x\cos\beta-y\sin\beta=a\cos 2\beta$ है

हल—दी हुई रेखा का समीकरण,

$$x\sec\beta+y\,\mathrm{cosec}\,\beta=a \qquad \ldots(1)$$

रेखा (1) के लम्ब रेखा का समीकरण

$$x\,\mathrm{cosec}\,\beta-y\sec\beta=\lambda \qquad \ldots(2)$$

प्रश्नानुसार, रेखा (2) बिन्दु $(a\cos^3\beta, a\sin^3\beta)$ से होकर जाती है। अतः यह बिन्दु रेखा (2) को सन्तुष्ट करेगा।

रेखा (2) में $x=a\cos^3\beta$ तथा $y=a\sin^3\beta$ रखने पर।

$$a\cos^3\beta.\mathrm{cosec}\,\beta-a\sin^3\beta\sec\beta=\lambda$$

या $$\frac{a\cos^3\beta}{\sin\beta}-\frac{a\sin^3\beta}{\cos\beta}=\lambda$$

या $$\frac{a\cos^4\beta-a\sin^4\beta}{\sin\beta\cos\beta}=\lambda$$

या $$\frac{a(\cos^4\beta-\sin^4\beta)}{\sin\beta\cos\beta}=\lambda$$

या $$\frac{a\{(\cos^2\beta)^2-(\sin^2\beta)^2\}}{\sin\beta\cos\beta}=\lambda$$

या $$\frac{a(\cos^2\beta+\sin^2\beta)(\cos^2\beta-\sin^2\beta)}{\sin\beta\cos\beta}=\lambda$$

या $$\frac{a\cos 2\beta}{\sin\beta\cos\beta}=\lambda$$

या $$\lambda=\frac{a\cos 2\beta}{\sin\beta\cos\beta}$$

λ का मान समीकरण (2) में रखने पर,

$$x\,\mathrm{cosec}\,\beta-y\sec\beta=\frac{a\cos 2\beta}{\sin\beta\cos\beta}$$

या $$x\,\mathrm{cosec}\,\beta\sin\beta\cos\beta-y\sec\beta\sin\beta\cos\beta=a\cos 2\beta$$

या $$\frac{a\sin\beta\cos\beta}{\sin\beta}-y\frac{\sin\beta\cos\beta}{\cos\beta}=a\cos 2\beta$$

या $$x\cos\beta-y\sin\beta=a\cos 2\beta$$ इति सिद्धम्

31. रेखाओं $3x+4y=7$ तथा $x-2y+1=0$ के प्रतिच्छेद बिन्दु से जाने वाली उस रेखा का समीकरण जिस पर मूल बिन्दु उपस्थित हैं।

हल—दी गई रेखाओं के समीकरण,

$$3x+4y=7 \quad \ldots(1)$$

तथा $$x-2y+1=0$$

या $$x-2y=-1 \quad \ldots(2)$$

समीकरण (2) में 2 की गुणा करने पर,

$$2x-4y=-2 \quad \ldots(3)$$

समीकरण (1) व (3) को जोड़ने पर,

$$5x=5$$

या $x=\frac{5}{5}=1$ समीकरण (1) में रखने पर,

$$3\times 1+4y=7$$

या $$3+4y=7$$

या $$4y=7-3$$

या $$4y=4$$

या $$y=\frac{4}{4}$$

या $$y=1$$

अतः रेखाओं (1) व (2) का प्रतिच्छेद बिन्दु $=(1,1)$

मूल बिन्दु (0,0) तथा रेखा (1) व (2) के प्रतिच्छेद बिन्दु (1,1) से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण,

सूत्र $$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1) \text{ से,}$$

$$y-0=\frac{1-0}{1-0}(x-0)$$

या $$y-0=\frac{1}{1}(x-0)$$

या $$y=x$$

$$x-y=0$$ उत्तर

32. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए, जो रेखाओं $3x+y=2$ एवं $6x-y=9$ के प्रतिच्छेद बिन्दु से होकर जाती है तथा धन X- अक्ष से का 45° कोण बनाती है।

हल—दी गई रेखाओं के समीकरण,

$$3x+y=2 \quad \ldots(1)$$

$$6x-y=9 \quad \ldots(2)$$

समीकरण (1) व (2) को जोड़ने पर,

$$9x=11$$

या $$x=\frac{11}{9}$$

x का यह मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$\frac{3\times 11}{9}+y=2$$

या $$\frac{11}{3}+y=2$$

या $$y=2-\frac{11}{3}$$

$$=\frac{6-11}{3}=\frac{-5}{3}$$

अतः दी गई रेखाओं (1) व (2) का प्रतिच्छेद बिन्दु $\left(\frac{11}{9},\frac{-5}{3}\right)$ है।

प्रश्नानुसार,

रेखा का X-अक्ष के साथ बना कोण $(\theta)=45°$,

$\therefore$ रेखा की प्रवणता $(m)=\tan\theta$

$$=\tan 45°$$

$$=1$$

प्रवणता $(m=1)$ तथा बिन्दु $\left(\frac{11}{9},\frac{-5}{3}\right)$ से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण सूत्र

$y-y_1=m(x-x_1)$ से,

$$y-\left(-\frac{5}{3}\right)=1\times\left(x-\frac{11}{9}\right)$$

या $$y+\frac{5}{3}=x-\frac{11}{9}$$

या $$y+\frac{11}{9}+\frac{5}{3}=x$$

या $$y+\frac{11+15}{9}=x$$

या $$y+\frac{26}{9}=x$$

या $$9y+26=9x$$

या $$9x-9y-26=0 \Rightarrow 9x-9y=26$$ उत्तर

33. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए, जो रेखाओं $3x+y=2$ तथा $6x-y=10$ के प्रतिच्छेद बिन्दु से होकर जाती है तथा धन X-अक्ष से $60°$ का कोण बनाती है।

हल—दी गई रेखाओं के समीकरण,

$$3x+y=2 \quad \ldots(1)$$

$$6x-y=10 \quad \ldots(2)$$

समीकरण (1) व (2) को जोड़ने पर,

$$9x=12$$

या $x=\frac{12}{9}=\frac{4}{3}$ को समीकरण (1) में रखने पर,

$$3\times\frac{4}{3}+y=2$$

या $$4+y=2$$

या $$y=2-4$$

या $$y=-2$$

अतः दी गई रेखाओं (1) व (2) का प्रतिच्छेद बिन्दु $\left(\frac{4}{3},-2\right)$ है।

रेखा का धन X-अक्ष के साथ बना कोण, $(\theta)=60°$

$\therefore$ रेखा की प्रवणता $(m)=\tan\theta$

$$=\tan 60°$$

$$=\sqrt{3}$$

अब, प्रवणता $(m=\sqrt{3})$ तथा बिन्दु $\left(\frac{4}{3},-2\right)$ से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण सूत्र

$y-y_1=m(x-x_1)$ से,

$$y-(-2)=\sqrt{3}\left(x-\frac{4}{3}\right)$$

या $$y+2=\sqrt{3}x-\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

या $$y+2=\sqrt{3}x-\frac{4}{\sqrt{3}}$$

या $$2+\frac{4}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}x-y$$

या $$2\sqrt{3}+4=3x-\sqrt{3}y$$

या $$\mathbf{3x-\sqrt{3}y=4+2\sqrt{3}}$$ उत्तर

34. रेखा $3x+5y=15$ के निर्देशांक्षों (coordonate axes) के साथ प्रतिच्छेद बिन्दुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल—दी गई रेखा का समीकरण,

$$3x+5y=15 \quad ...(1)$$

माना रेखा (1) X-अक्ष को बिन्दु $(a,0)$ तथा Y-अक्ष $(0,b)$ पर प्रतिच्छेद करती है। अत: ये दोनों बिन्दु रेखा (1) को सन्तुष्ट करेंगे।

अत: समीकरण (1) में $x=a$ तथा $y=0$ रखने पर,

$$3a+5\times 0=15$$

$$23a+0=15$$

$$3a=15 \Rightarrow a=5$$

अत: X-अक्ष पर स्थित अभीष्ट बिन्दु $=(5,0)$ उत्तर

तथा समीकरण (1) में $x=0$ तथा $y=b$ रखने पर,

$$3\times 0+5b=15$$

या $$0+5b=15$$

या $$5b=15 \Rightarrow b=\frac{15}{5}=3$$

$\therefore Y$-अत: अक्ष पर स्थित अभीष्ट बिन्दु $=(0,3)$ उत्तर

अभ्यास 14.6

1. निम्नलिखित रेखाओं पर मूल बिन्दु से डाले गए लम्ब की लम्बाई ज्ञात कीजिए—

(i) $6x+8y+25=0$ (ii) $5x+12y-1=0$ (iii) $14x-3y+15=0$

(iv) $6x-8y+25=0$ (v) $2x+3y+5=0$ (vi) $5x+12y-13=0$

हल—(i) दी गई रेखा का समीकरण,

$$6x+8y+25=0 \quad ...(1)$$

रेखा (1) की तुलना $ax+by+c=0$ रेखा से करने पर,

$$a = 6, b = 8 \text{ तथा } c = 25$$

मूल बिन्दु से रेखा (1) पर डाले गए लम्ब की लम्बाई सूत्र

$$p = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ से,}$$

अतः
$$p = \frac{25}{\sqrt{6^2 + 8^2}}$$

$$= \frac{25}{\sqrt{36 + 64}}$$

$$= \frac{25}{\sqrt{100}} = \frac{25}{10} = \frac{5}{2} = 2.5 \text{ इकाई}$$ उत्तर

(ii) दी गई रेखा का समीकरण,

$$5x + 12y - 1 = 0 \quad \ldots(1)$$

रेखा (1) की तुलना रेखा $ax + by + c = 0$ से करने पर,

$$a = 5, b = 12 \text{ तथा } c = -1$$

मूल बिन्दु से रेखा (1) पर डाले गए लम्ब की लम्बाई सूत्र

$$p = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ से,}$$

$$p = \frac{-1}{\sqrt{5^2 + 12^2}}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{25 + 144}} = \frac{-1}{\sqrt{169}} = -\frac{1}{13}$$

या
$$p = \frac{1}{13} \text{ इकाई } (\because \text{ ऋणात्मक चिह्न छोड़ने पर })$$ उत्तर

(iii) दी गई रेखा का समीकरण,

$$4x - 3y + 15 = 0 \quad \ldots(1)$$

रेखा (1) की तुलना रेखा $ax + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = 4, b = -3 \text{ तथा } c = 15$$

मूल बिन्दु (0,0) से रेखा (1) पर डाले गए लम्ब की लम्बाई सूत्र

$$p = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ से,}$$

अतः
$$p = \frac{15}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}}$$

$$= \frac{15}{\sqrt{16 + 9}}$$

$$= \frac{15}{\sqrt{25}}$$

$$= \frac{15}{5} = 3 \text{ इकाई}$$ उत्तर

(iv) दी गई रेखा का समीकरण,

$$6x + 8y + 25 = 0 \quad \ldots(1)$$

रेखा (1) की तुलना रेखा $ax + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = 6, b = -8 \text{ तथा } c = 25$$

मूल बिन्दु से रेखा (1) पर डाले गए लम्ब की लम्बाई सूत्र

$$p = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ से,}$$

अतः

$$p = \frac{25}{\sqrt{6^2 + (-8)^2}} = \frac{25}{\sqrt{36 + 64}} = \frac{25}{\sqrt{100}}$$

$$= \frac{25}{10} = \frac{5}{2} \text{ इकाई}$$ उत्तर

(v) दी गई रेखा का समीकरण,

$$2x + 3y + 5 = 0 \quad \ldots(1)$$

रेखा (1) की तुलना रेखा $ax + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = 2, b = 3 \text{ तथा } c = 5$$

मूल विन्दु से रेखा (1) पर डाले गए लम्ब की लम्बाई सूत्र

$$p = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ से,}$$

$$p = \frac{5}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{5}{\sqrt{4 + 9}} = \frac{15}{\sqrt{13}} \text{ इकाई}$$ उत्तर

(vi) दी गई रेखा का समीकरण,

$$5x + 12y - 13 = 0 \quad \ldots(1)$$

रेखा (1) की तुलना रेखा $ax + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = 5, b = 12 \text{ तथा } c = -13$$

मूल बिन्दु से रेखा (1) पर डाले गए लम्ब की लम्बाई सूत्र

$$p = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ से}$$

अतः

$$p = \frac{-13}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{-13}{\sqrt{25 + 144}} = \frac{-13}{\sqrt{169}}$$

$$= \frac{-13}{13} = -1 = 1 \text{ इकाई}$$

(ऋणात्मक चिह्न छोड़ने पर) उत्तर

2. मूल बिन्दु से रेखा $3x+4y-17=0$ पर डाले गए लम्ब की लम्बाई या लाम्बिक दूरी ज्ञात कीजिए।

हल—दी गई रेखा का समीकरण,

$$3x+4y+17=0 \qquad ...(1)$$

रेखा (1) की तुलना रेखा $ax+bx+c=0$ से करने पर,

$$a=3, b=4 \text{ तथा } c=17$$

मूल बिन्दु से रेखा (1) पर डाले गए लम्ब की लम्बाई सूत्र

$$p=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ से,}$$

$$=\frac{17}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{17}{\sqrt{9+16}}=\frac{17}{\sqrt{25}}=\frac{17}{5} \text{ इकाई} \qquad \text{उत्तर}$$

3. मूल बिन्दु से रेखा $3x+4y-10=0$ पर डाले गए लम्ब की लम्बाई की गणना कीजिए।

हल—दी गई रेखा का समीकरण,

$$3x+4y-10=0$$

रेखा (1) की तुलना रेखा $ax+bx+c=0$ से करने पर,

$$a=3, b=4 \text{ तथा } c=-10$$

मूल बिन्दु से रेखा (1) पर डाले गए लम्ब की लम्बाई सूत्र

$$p=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ से,}$$

अतः
$$p=\frac{-10}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{10}{\sqrt{9+16}}=\frac{-10}{\sqrt{25}}=\frac{-10}{5}$$

$$=-2=2 \text{ इकाई (ऋणात्मक चिह्न छोड़ने पर)} \qquad \text{उत्तर}$$

4. सिद्ध कीजिए कि बिन्दुओं (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) को मिलाने वाली रेखा की मूल बिन्दु से दूरी $\dfrac{x_1y_1-x_2y_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}$ है।

हल—हम जानते हैं कि बिन्दु (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) को मिलाने वाली रेखा का समीकरण निम्न सूत्र से दिया जाता है—

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

या
$$(x_2-x_1)y-(x_2-x_1)y_1=(y_2-y_1)x-(y_2-y_1)x_1$$

या
$$(y_2-y_1)x-(y_2-y_1)x_1=(x_2-x_1)y-(x_2-x_1)y_1$$

या
$$(y_2-y_1)x-(x_2-x_1)y+(x_2-x_1)y_1-(y_2-y_1)x_1=0 \qquad ...(1)$$

रेखा (1) की तुलना रेखा $ax+by+c=0$ से करने पर,

$a=(y_2-y_1), b=(x_2-x_1)$ तथा $c=(x_2-x_1)y_1-(y_2-y_1)x_1$

रेखा (1) की मूल बिन्दु से दूरी सूत्र $p = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ से,

अतः
$$p = \frac{(x_2 - x_1)y_1 - (y_2 - y_1)x_1}{\sqrt{(y_2-y_1)^2+(x_2-x_1)^2}}$$
$$= \frac{x_2 y_1 - x_1 y_1 - x_1 y_2 + x_1 y_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}$$
$$= \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}$$
इति सिद्धम्

5. बिन्दु (1,2) से रेखा $3x+4y+4=0$ पर डाले गए लम्ब की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल—हम जानते हैं कि बिन्दु (x_1, y_1) से रेखा $ax+by+c=0$ पर डाले गए लम्ब की लम्बाई,
$$p = \frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^1}}$$

अतः दिए गए बिन्दु (1,2) से रेखा $3x+4y+4=0$ पर डाले गए लम्ब की लम्बाई,
$$p = \frac{3\times1+4\times2+4}{\sqrt{3^2+4^2}}$$
$$= \frac{3+8+4}{\sqrt{9+16}}$$
$$= \frac{15}{\sqrt{25}} = \frac{15}{5} = 3 \text{ इकाई}$$
उत्तर

6. बिन्दु (3,4) व बिन्दु (2,3) को मिलाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए। इस रेखा पर बिन्दु (3,2) से डाले गए लम्ब की माप ज्ञात कीजिए।

हल—माना $A(x_1, y_1) = (3,4)$

तथा $B(x_2, y_2) = (2,3)$

बिन्दु A तथा B को मिलाने वाली रेखा का समीकरण
$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

या $$y-4 = \frac{3-4}{2-3}(x-3)$$

या $$y-4 = \frac{-1}{-1}(x-3)$$

या $$y-4 = x-3$$

या $$x-y+4-3 = 0$$

या $$x-y+1=0 \quad \ldots(1)$$
उत्तर

रेखा (1) पर बिन्दु (3,2) से डाले गए लम्ब की माप

$$p=\frac{3-2+1}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}$$

$$=\frac{4-2}{\sqrt{1+1}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\text{ इकाई}$$ उत्तर

7. बिन्दु (1,2) से रेखा $3x-4y-15=0$ पर डाले गए लम्ब की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल—हम जानते हैं कि—बिन्दु (x_1, y_1) से रेखा $ax+by+c=0$ पर डाले गए लम्ब की लम्बाई,

$$p=\frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

अतः बिन्दु (1,2) से रेखा $3x-4y-15=0$ पर डाले गए लम्ब की लम्बाई,

$$p=\frac{3\times1-4\times2-15}{\sqrt{3^2+4^2}}$$

या $$p=\frac{3-8-15}{\sqrt{9+16}}$$

$$=\frac{3-23}{\sqrt{25}}=-\frac{20}{5}$$

$$=-4$$

$= 4$ इकाई (ऋणात्मक चिह्न छोड़ने पर) उत्तर

8. बिन्दु $(-4,5)$ से रेखा $5x+12y-1=0$ पर डाले गए लम्ब की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल—दी गई रेखा का समीकरण,

$$5x+12y-1=0 \quad \ldots(1)$$

माना दिया गया बिन्दु $p(x_1, y_1)=(-4,5)$

अतः बिन्दु p से रेखा (1) पर डाले गए लम्ब की लम्बाई

$$p=\frac{5\times(-4)+12\times5-1}{\sqrt{5^2+12^2}}$$

$$p=\frac{-20+60-1}{\sqrt{25+144}}$$

$$=\frac{60-21}{\sqrt{169}}=\frac{39}{13}$$

$= 13$ इकाई उत्तर

9. बिन्दु (0,1) से रेखा $5x+12y=-1$ पर डाले गए लम्ब की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल—दी गई रेखा का समीकरण,

$$5x+12y=-1$$

या $$5x+12y+1=0 \quad \ldots(1)$$

तथा दिया गया बिन्दु $p(x_1, y_1) = (0, 1)$

अतः बिन्दु p से रेखा (1) पर डाले गए लम्ब की लम्बाई

$$p = \frac{5\times0+12\times1+1}{\sqrt{5^2+12^2}}$$

$$= \frac{0+12+1}{\sqrt{25+144}}$$

$$= \frac{13}{\sqrt{169}}$$

$$= \frac{13}{13} = 1 \text{ इकाई}$$ उत्तर

10. रेखा $x\cos 35^\circ - y\sin 35^\circ = p$ पर बिन्दु $(2a\sin 65^\circ, 2a\cos 65^\circ)$ से डाले गए लम्ब की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल—दी गई रेखा का समीकरण,

$$x\cos 35^\circ - y\sin 35^\circ = p$$

या $$x\cos 35^\circ - y\sin 35^\circ - p = 0 \quad \ldots(1)$$

दिया गया बिन्दु $A(x_1, y_1) = (2a\sin 65^\circ, 2a\cos 65^\circ)$

अतः बिन्दु A से रेखा (1) पर डाले गए लम्ब की लम्बाई

$$= \frac{2a\sin 65^\circ\cos 35^\circ - 2a\cos 65^\circ\sin 35^\circ - p}{\sqrt{\cos^2 35^\circ + \sin^2 35^\circ}}$$

$$= \frac{2a(\sin 65^\circ\cos 35^\circ - \cos 65^\circ\sin 35^\circ) - p}{\sqrt{1}}$$

$$= \frac{2a\sin(65^\circ - 35^\circ) - p}{1}$$

$$= 2a\sin 30^\circ - p$$

$$= 2a\times\frac{1}{2} - p = a - p \text{ इकाई}$$ उत्तर

11. रेखा $\frac{x\cos\alpha}{a} + \frac{y\sin\alpha}{b} = 1$ पर बिन्दु $(\sqrt{a^2-b^2}, 0)$ से डाले गए लम्ब की लम्बाई p_1 तथा बिन्दु $(-\sqrt{a^2-b^2}, 0)$ से डाले गए लम्ब की माप p_2 है, तो सिद्ध कीजिए- $p_1p_2 = b^2$

हल—दी गई रेखा का समीकरण,

$$\frac{x\cos\alpha}{a} + \frac{y\sin\alpha}{b} = 1$$

या $$x\frac{\cos\alpha}{a} + y\frac{\sin\alpha}{b} - 1 = 0$$

या $$(b\cos\alpha)x + (a\sin\alpha)y - ab = 0 \quad \ldots(1)$$

माना दिए गए बिन्दु $A(x_1, y_1) = (\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ तथा $B(x_2, y_2) = (-\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$

अतः रेखा (1) पर बिन्दु A से डाले गए लम्ब की माप

$$p_1 = \frac{(b\cos\alpha)\sqrt{a^2 - b^2} + (a\sin\alpha)\times 0 - ab}{\sqrt{(b\cos\alpha)^2 + (a\sin\alpha)^2}}$$

या $$p_1 = \frac{b\sqrt{a^2 - b^2}\cdot\cos\alpha + 0 - ab}{\sqrt{b^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha}}$$

या $$p_1 = \frac{-ab + b\sqrt{a^2 - b^2}\cdot\cos\alpha}{\sqrt{b^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha}}$$

या $$p_1 = \frac{-b(a - \sqrt{a^2 - b^2}\cos\alpha)}{\sqrt{b^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha}}$$

या $$p_1 = \frac{b(a - \sqrt{a^2 - b^2}\cdot\cos\alpha)}{\sqrt{b^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha}}$$

(ऋणात्मक चिह्न छोड़ने पर)

तथा बिन्दु B से रेखा (1) पर डाले गए लम्ब की माप

$$p_2 = \frac{b\cos\alpha(-\sqrt{a^2 - b^2}) + a\sin\alpha\times 0 - ab}{\sqrt{(b\cos\alpha)^2 + (a\sin\alpha)^2}}$$

$$= \frac{-b\sqrt{(a^2 - b^2)}\cdot\cos\alpha + 0 - ab}{\sqrt{b^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha}}$$

$$= \frac{-b(\sqrt{a^2 - b^2}\cdot\cos\alpha + a)}{\sqrt{b^2\cos\alpha + a^2\sin^2\alpha}}$$

$$\frac{b(\sqrt{a^2 - b^2}.\cos\alpha + a)}{\sqrt{b^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha}}$$

(ऋणात्मक चिह्न छोड़ने पर)

$\therefore$ $$p_1 p_2 = \frac{b(a - \sqrt{a^2 - b^2}.\cos\alpha)}{\sqrt{b^2\cos\alpha + a^2\sin\alpha}} \times \frac{b(\sqrt{a^2 - b^2}\cdot\cos\alpha + a)}{\sqrt{b^2\cos^2\theta \cdot + a^2\sin^2\theta}}$$

या $$p_1 p_2 = \frac{b^2\{a^2 - (\sqrt{a^2 - b^2}\cdot\cos\alpha)^2\}}{a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha}$$

या $$= \frac{b^2\{a^2-(a^2-b^2)\cdot\cos^2\alpha\}}{a^2\sin^2\alpha+b^2\cos^2\alpha}$$

या $$= \frac{b^2(a^2-a^2\cos^2\alpha+b^2\cos^2\alpha)}{a^2\sin^2\alpha+b^2\cos^2\alpha}$$

या $$= \frac{b^2\{a^2(1-\cos^2\alpha)+b^2\cos^2\alpha\}}{a^2\sin^2\alpha+b^2\cos^2\alpha}$$

या $$= \frac{b^2\{a^2\sin^2\alpha+b^2\cos^2\alpha\}}{(a^2\sin^2\alpha+b^2\cos^2\alpha)}$$

या $$p_1p_2 = b^2$$ इति सिद्धम्

12. अक्षों पर अन्तःखण्ड a और b काटने वाली रेखा पर मूल बिन्दु से डाले गए लम्ब की माप p है। सिद्ध कीजिए— $\frac{1}{p_2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$

हल—अक्षों पर अन्तःखण्ड a और b काटने वाली रेखा का समीकरण निम्न है—

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

या $$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1=0$$

या $$bx+ay-ab=0$$

रेखा (1) पर मूल बिन्दु (0,0) से डाले गए लम्ब की माप

$$p=\frac{b\times0+a\times0-ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$=\frac{-ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

या $$p^2=\left(\frac{-ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2$$

या $$p^2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$

या $$\frac{1}{p_2}=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}$$

या $$\frac{1}{p_2}=\frac{1}{b^2}+\frac{1}{a^2}$$

या $$\frac{1}{p_2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$$ इति सिद्धम्

13. दो समान्तर रेखाओं $x+y+1=0$ तथा $x+y+5=0$ के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल—दी गई रेखाएँ,

$$x+y+1=0 \quad \ldots(1)$$

तथा $$x+y+5=0 \quad \ldots(2)$$

मूल बिन्दु (0,0) से रेखा (1) पर डाले गए लम्ब की माप $(p_1) = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}}$

या $$p_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

इसी प्रकार, मूल बिन्दु (0,0) से रेखा (2) पर डाले गए लम्ब की माप $p_2 = \frac{5}{\sqrt{1^2+1^2}}$

या $$p_2 = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

$\therefore$ रेखाओं (1) व (2) के बीच की दूरी $= p_2 - p_1$

या $$= \frac{5}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{5-1}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \text{ इकाई}$$ **उत्तर**

14. समान्तर रेखाओं $3x+4y+15=0$ तथा $3x+4y+10=0$ के बीच की लम्बवत् दूरी ज्ञात कीजिए।

हल—दी गई रेखाओं के समीकरण,

$$3x+4y+15=0 \quad \ldots(1)$$

तथा $$3x+4y+15=0 \quad \ldots(2)$$

रेखा (1) पर मूल बिन्दु से डाले गए लम्ब की माप,

$$p_1 = \frac{15}{\sqrt{3^2+4^2}}$$

या $$= \frac{15}{\sqrt{9+16}} = \frac{15}{\sqrt{25}} = \frac{15}{5} = 3 \text{ इकाई}$$

रेखा (2) पर मूल बिन्दु से डाले गए लम्ब की माप,

$$p_2 = \frac{10}{\sqrt{3^2+4^2}}$$

$$= \frac{10}{\sqrt{9+16}} = \frac{10}{\sqrt{25}} = \frac{10}{5} = 2 \text{ इकाई}$$

अतः दी गई रेखाओं (1) व (2) के बीच की लम्बवत् दूरी $= p_1 - p_2$

$$= 3-2$$

$$= 1 \text{ इकाई}$$ **उत्तर**

15. समान्तर रेखाओं $5x+12y+15=0$ तथा $10x+24y-13=0$ के बीच की लम्बवत् दूरी ज्ञात कीजिए।

हल—दी गई रेखाओं के समीकरण,

$$5x+12x+15=0 \qquad \ldots(1)$$

$$10x+24y-13=0 \qquad \ldots(2)$$

अतः मूल बिन्दु (0,0) से रेखा (1) पर डाले गए लम्ब की माप,

$$p_1 = \frac{17}{\sqrt{5^2+12^2}} = \frac{17}{\sqrt{25+144}}$$

$$= \frac{17}{\sqrt{169}}$$

$$= \frac{17}{13} \text{ इकाई}$$

तथा मूल बिन्दु (0,0) से रेखा (2) पर डाले गए लम्ब की माप,

$$p_2 = \frac{-13}{\sqrt{10^2+24^2}}$$

$$= \frac{-13}{\sqrt{100+576}}$$

$$= \frac{-13}{\sqrt{676}}$$

$$= \frac{-13}{26} = -\frac{1}{2} \text{ इकाई}$$

अतः रेखा (1) व (2) के बीच की दूरी $= p_1 - p_2$

$$= \frac{17}{13} - \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{17}{13} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{34+13}{26}$$

$$= \frac{47}{26} \text{ इकाई} \qquad \text{उत्तर}$$

16. सिद्ध कीजिए कि समान्तर रेखाओं $ax+by+c=0$ व $k(ax+by)+d=0$ के बीच की दूरी $\dfrac{c-\dfrac{d}{k}}{\sqrt{a^2+b^2}}$ है।

अथवा

दो समान्तर रेखाओं के समीकरण $ax+by+c=0$ तथा $k(ax+by)+d=0$ हैं। यदि रेखाओं के बीच की दूरी p है, तो सिद्ध कीजिए— $p^2=\dfrac{c^2k^2+d^2-2ckd}{k^2(a^2b^2)}$

हल—दी गई समान्तर रेखाओं के समीकरण,

$$ax+by+c=0 \qquad ...(1)$$

तथा $\quad k(ax+by)+d=0$

या $\quad kax+kby+d=0 \qquad ...(2)$

रेखा (1) पर मूल बिन्दु से डाले गए लम्ब की लम्बाई,

$$p_1=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

तथा रेखा (2) पर मूल बिन्दु से डाले गए लम्ब की लम्बाई,

$$p_2=\frac{d}{\sqrt{(ka)^2+(kb)^2}}$$

$$=\frac{d}{\sqrt{k^2a^2+k^2b^2}}$$

$$=\frac{d}{k\sqrt{(a^2+b^2)}}$$

अतः समान्तर रेखाओं (1) व (2) के बीच की दूरी

$$p=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}-\frac{d}{k\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$p=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(c-\frac{d}{k}\right)=\frac{\left(c-\dfrac{d}{k}\right)}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

इति सिद्धम्

अथवा

हम सिद्ध कर चुके हैं

$$P=\frac{c-\dfrac{d}{k}}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर,

$$p^2=\left(\frac{c-\dfrac{d}{k}}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2$$

या $$p^2 = \frac{\left(c - \frac{d}{k}\right)^2}{(a^2 + b^2)}$$

$$p^2 = \frac{\left(\frac{ck - d}{k}\right)^2}{a^2 + b^2}$$

$$p^2 = \frac{\frac{c^2k^2 + d^2 - 2ckd}{k^2}}{a^2 + b^2}$$

$$p^2 = \frac{c^2k^2 + d^2 - 2ckd}{k^2(a^2 + b^2)}$$ इति सिद्धम्

17. रेखा $ax + by + a + b = 0$ पर बिन्दु (1,1) से डाले गए लम्ब की माप p है। सिद्ध कीजिए कि— $p^2 = 4 + \frac{8ab}{a^2 + b^2}$

हल—दी गई रेखा का समीकरण,

$$ax + by + a + b = 0$$

अतः रेखा (1) पर बिन्दु (1,1) से डाले गए लम्ब की माप

$$p = \frac{a \times 1 + b \times 1 + a + b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

या $$p = \frac{a + b + a + b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

या $$p = \frac{2a + 2b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

या $$p = \frac{2(a + b)}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर,

$$p^2 = \left[\frac{2(a + b)}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right]^2$$

या $$p^2 = \frac{4(a + b)^2}{(a^2 + b^2)}$$

या $$p^2 = \frac{4(a^2 + b^2 + 2ab)}{(a^2b^2)}$$

या $$p^2 = \frac{4(a^2 + b^2)}{(a^2 + b^2)} + \frac{8ab}{(a^2 + b^2)}$$

या $$p^2 = 4 + \frac{8ab}{a^2 + b^2}$$ इति सिद्धम्

18. सिद्ध कीजिए कि बिन्दुओं (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) को मिलाने वाली रेखा की मूल बिन्दु से दूरी $\dfrac{x_1y_2 - x_2y_1}{\sqrt{(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)^2}}$ है।

हल—इस प्रश्न के हल के लिए प्रश्न संख्या 4 के हल को देखिए।

19. यदि रेखाओं $2x - y = 1$ व $ax + 2y = 4$ के बीच का कोण $45°$ है, तो a का मान ज्ञात कीजिए।

हल—दी गई रेखाओं के समीकरण,

$$2x - y = 1 \Rightarrow 2x - y - 1 = 0 \quad ...(1)$$

$$ax + 2y = 4 \Rightarrow ax + 2y - 4 = 0 \quad ...(2)$$

रेखा (1) की प्रवणता $(m_1) = -\dfrac{x \text{ का गुणांक}}{y \text{ का गुणांक}}$

या $$m_1 = -\frac{2}{-1} = 2$$

तथा रेखा (2) की प्रवणता $(m_2) = -\dfrac{x \text{ का गुणांक}}{y \text{ का गुणांक}}$

या $$m_2 = -\frac{a}{2}$$

रेखा (1) व (2) के बीच का कोण सूत्र, $\tan\theta = \dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$ से,

अतः $$\tan 45^\circ = \frac{2 - \left(-\frac{a}{2}\right)}{1 + 2 \times \left(-\frac{a}{2}\right)}$$

या $$1 = \frac{2 + \frac{a}{2}}{1 - a}$$

या $$1 = \frac{\frac{4 + a}{2}}{1 - a}$$

या $$1 = \frac{4 + a}{2(1 - a)}$$

या $$2(1 - a) = 4 + a$$

या $$2 - 2a = 4 + a$$

या $$-2a - a = 4 - 2$$

या $$-3a = 2$$

या $$a = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}$$ उत्तर

20. अक्षों द्वारा रेखा $x\sin\alpha + y\cot\alpha = \sin 2\alpha$ के कटे हुए रेखाखण्ड की माप ज्ञात कीजिए। इस रेखाखण्ड के मध्य बिन्दु के निर्देशांक भी ज्ञात कीजिए।

हल—दी गई रेखा का समीकरण,

$$x\sin\alpha + y\cot\alpha = \sin 2\alpha$$

या $$x\sin\alpha + y\cot\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

दोनों पक्षों में $2\sin\alpha\cos\alpha$ से भाग करने पर,

$$\frac{x\sin\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha} + \frac{y\cos\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}$$

या $$\frac{x}{2\cos\alpha} + \frac{y}{2\sin\alpha} = 1 \qquad \ldots(1)$$

जो कि रेखा का अन्तःखण्ड रूप है।

अतः रेखा (1) द्वारा अक्षों पर कटे अन्तःखण्ड क्रमशः $2\cos\alpha$ तथा $2\sin\alpha$ हैं।

$\therefore$ रेखा (1) तथा X-अक्ष का प्रतिच्छेद बिन्दु $= (2\cos\alpha, 0)$

तथा रेखा (1) तथा Y-अक्ष का प्रतिच्छेद बिन्दु $= (0, 2\sin\alpha)$

अक्षों के द्वारा रेखा (1) के कटे हुए अन्तःखण्ड की माप

= बिन्दुओं (2cos,0) व $(0, 2\sin\alpha)$ के बीच की दूरी

$$= \sqrt{(2\cos\alpha - 0)^2 + (0 - 2\sin\alpha)^2}$$

$$= \sqrt{4\cos^2\alpha + 4\sin^2\alpha}$$

$$= \sqrt{4(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)}$$

$$= \sqrt{4 \times 1}$$

$$= \sqrt{4}$$

= **2 इकाई** उत्तर

रेखा (1) के मध्य-बिन्दुओं के निर्देशांक = बिन्दु $(2\cos\alpha, 0)$ व $(0, 2\sin\alpha)$ का मध्य बिन्दु

$$= \left[\frac{2\cos\alpha + 0}{2}, \frac{0 + 2\sin\alpha}{2}\right]$$

$$= \left[\frac{2\cos\alpha}{2}, \frac{2\sin\alpha}{2}\right]$$

$$= (\cos\alpha, \sin\alpha)$$ उत्तर

विविध प्रश्नावली

1. k के मान ज्ञात कीजिए जबकि रेखा $(k-3)x-(4-k^2)y+k^2-7k+6=0$

(i) X-अक्ष के समान्तर है

(ii) Y-अक्ष के समान्तर है

(iii) मूल बिन्दु से होकर जाती है।

हल—दी गई रेखा का समीकरण,

$$(k-3)x-(4-k^2)y+k^2-7k+6=0 \quad ...(1)$$

X-अक्ष का समीकरण, $y=0$ ...(2)

Y-अक्ष का समीकरण, $x=0$ ...(3)

रेखा (1) की प्रवणता $= \dfrac{-x \text{ का गुणांक}}{y \text{ का गुणांक}}$

$$= \frac{-(k-3)}{-(4-k^2)} = \frac{(k-3)}{(4-k^2)}$$

रेखा (2) की प्रवणता $= \dfrac{-x \text{ का गुणांक}}{y \text{ का गुणांक}} = -\dfrac{0}{1} = 0$

तथा रेखा (3) की प्रवणता $= \dfrac{-x \text{ का गुणांक}}{y \text{ का गुणांक}} = \dfrac{-1}{0} = 0$

(i) जब रेखा (1) तथा X-अक्ष अर्थात् समीकरण (2) समान्तर हों, तो

रेखा (1) की प्रवणता = रेखा (2) की प्रवणता

$$\frac{k-3}{4-k^2} = 0$$

या $$k-3=0$$

या $$k=3$$ उत्तर

(ii) जब रेखा (1) तथा Y-अक्ष अर्थात् रेखा (3) समान्तर हों, तो

रेखा (1) की प्रवणता = रेखा (3) की प्रवणता

$$\frac{k-3}{4-k^2} = \infty$$

या $$\frac{k-3}{4-k^2} = \frac{1}{0}$$

या $$0 = 4-k^2$$

या $$k^2 = 4$$

या $$k = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$ उत्तर

(iii) जब रेखा (1) मूल बिन्दु (0,0) से होकर जाती है। तब समीकरण (1) में $x=0$ तथा $y=0$ रखने पर,

$$(k-3)\times 0-(4-k^2)\times 0+k^2-7k+6=0$$

$$k^2 - 7k + 6 = 0$$

$$k^2 - 6k - k + 6 = 0$$

या $\qquad k(k-6) - 1(k-6) = 0$

या $\qquad (k-6)(k-1) = 0$

यदि $k - 6 = 0$ तब $k = 6$

यदि $k - 1 = 0$ तब $k = 1$ **उत्तर**

2. θ और p के मान ज्ञात कीजिए यदि रेखा $x\cos\theta + y\sin\theta = p$ रेखा $\sqrt{3}x + y + 2 = 0$ का लम्ब रूप है।

हल—दी गई रेखा का समीकरण,

$$\sqrt{3}x + y + 2 = 0 \qquad \ldots(1)$$

या $\qquad \sqrt{3}x + y = -2$

या $\qquad \dfrac{\sqrt{3}x}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2}} + \dfrac{y}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2}} = \dfrac{-2}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2}}$

या $\qquad \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3+1}}x + \dfrac{y}{\sqrt{3+1}} = \dfrac{-2}{\sqrt{3+1}}$

या $\qquad \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}x + \dfrac{y}{\sqrt{4}} = \dfrac{-2}{\sqrt{4}}$

या $\qquad \dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \dfrac{1}{2}y = -\dfrac{2}{2}$

या $\qquad \dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \dfrac{1}{2}y = -1 \qquad \ldots(2)$

समीकरण (2) समीकरण (1) का लम्ब रूप है।

परन्तु प्रश्नानुसार, रेखा (1) का लम्ब रूप, $x\cos\theta + y\sin\theta = p \qquad \ldots(3)$

अतः रेखा (2) व (3) एक ही रेखा को निरूपित करती हैं।

∴ समीकरण (2) व (3) की तुलना करने पर,

$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \sin\theta = \dfrac{1}{2}$ तथा $p = -1$

या $\qquad p = 1$ इकाई (ऋणात्मक चिह्न छोड़ने पर)

अब $\qquad \tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta},$

या $\qquad \tan\theta = \dfrac{1/2}{\sqrt{3}/2}$

या $\qquad \tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

या $\qquad \tan\theta = \tan 30°$

$$\theta = 30°$$

$$= \frac{30^\circ \times \pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{6}$$

अतः $\theta = \frac{\pi}{6}$ तथा $p = 1$ इकाई

उत्तर

3. उन रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जिनके अक्षों पर कटे अन्तःखण्डों का योग और गुणनफल क्रमशः 1 और – 6 है।

हल—माना रेखा का समीकरण, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ...(1)

जहाँ X-अक्ष पर कटा अन्तःखण्ड $= a$

तथा Y-अक्ष पर कटा अन्तःखण्ड $= b$

प्रश्नानुसार, $a + b = 1$ ...(2)

तथा $ab = -6$ ...(3)

समीकरण (2) से $b = (1 - a)$ समीकरण (3) में रखने पर,

$$a(1-a) = -6$$

या $a - a^2 = -6$

या $-a^2 + a + 6 = 0$

या $a^2 - a - 6 = 0$

या $a^2 - 3a + 2a - 6 = 0$

या $a(a-3) + 2(a-3) = 0$

या $(a-3)(a+2) = 0$

यदि $a - 3 = 0$ तब $a = 3$

तथा यदि $a + 2 = 0$ तब $a = -2$

a के मान समीकरण (1) में रखने पर,

जब $a = 3$ तब $b = 1 - a = 1 - 3 = -2$

तथा जब $a = -2$ तब $b = 1 - a = 1 - (-2) = 1 + 2 = 3$

अतः अन्तःखण्ड $a = 3$ तथा $b = -2$ के संगत रेखा का समीकरण,

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{-2} = 1$$

या $2x - 3y = 6$ **उत्तर**

तथा जब $a = -2$ तथा $b = 3$ के संगत रेखा का समीकरण,

$$\frac{x}{-2} + \frac{y}{3} = 1 \Rightarrow -3x + 2y = 6$$ **उत्तर**

4. Y-अक्ष पर कौन से बिन्दु ऐसे हैं, जिनकी रेखा $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ से दूरी 4 इकाई है?

हल—दी गई रेखा का समीकरण,

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$$

या $4x+3y=12$

या $4x+3y-12=0$ ...(1)

माना Y-अक्ष पर स्थित बिन्दु $(0,b)$ से रेखा (1) की दूरी 4 इकाई है

अत: $\pm4=$ बिन्दु $(0,b)$ से रेखा (1) पर डाले गए लम्ब की माप

या $$\pm4=\frac{4\times0+3\times b-12}{\sqrt{4^2+3^2}}$$

या $$\pm4=\frac{3b-12}{5}$$

या $\pm20=3b-12\Rightarrow 3b-12=\pm20$

यदि $3b-12=20\Rightarrow 3b=20+12\Rightarrow 3b=32$

या $$b=\frac{32}{3}$$

तथा यदि $3b-12=-20\Rightarrow 3b=-20+12$

या $3b=-8$

या $$b=-\frac{8}{3}$$

अत: Y-अक्ष पर स्थित अभीष्ट बिन्दु $=\left(0,\frac{32}{3}\right)$ तथा $\left(0,\frac{-8}{3}\right)$ हैं। उत्तर

5. मूल बिन्दु से बिन्दुओं $(\cos\theta, \sin\theta)$ और $(\cos\phi, \sin\phi)$ को मिलाने वाली रेखा की लाम्बिक दूरी ज्ञात कीजिए।

हल—माना बिन्दु $A(x_1, y_1)=(\cos\theta, \sin\theta)$

तथा $B(x_2, y_2)=(\cos\phi, \sin\phi)$

बिन्दुओं A व B से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण

सूत्र $$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$ से,

अत: $$y-\sin\theta=\frac{(\sin\phi-\sin\theta)}{(\cos\phi-\cos\theta)}(x-\cos\theta)$$

या $(\cos\phi-\cos\theta)y-\sin\theta(\cos\phi-\cos\theta)$

$$=(\sin\phi-\sin\theta)x-\cos\theta(\sin\phi-\sin\theta)$$

या $(\sin\phi-\sin\theta)x-\cos\theta(\sin\phi-\sin\theta)=(\cos\phi-\cos\theta)y$

$$-\sin\theta(\cos\phi-\cos\theta)$$

या $(\sin\phi-\sin\theta)x-(\cos\phi-\cos\theta)y-\cos\theta(\sin\phi-\sin\theta)$

$$+\sin\theta(\cos\phi-\cos\theta)=0$$

या $(\sin\phi+\sin\theta)x-(\cos\phi-\cos\theta)y-\cos\theta\sin\phi+\cos\theta\sin\theta+\sin\theta\cos\phi$

$$-\sin\theta\cos\theta=0$$

या $(\sin\phi - \sin\theta)x - (\cos\phi - \cos\theta)y + \sin\theta\cos\phi - \cos\theta\sin\phi = 0$ ...(1)

रेखा (1) रेखा के व्यापक रूप $ax + bx + c = 0$ में है।

अतः मूल बिन्दु से रेखा (1) की लाम्बिक दूरी सूत्र $p = \left|\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$ से

$$P = \left|\frac{\sin\theta\cos\phi - \cos\theta\sin\phi}{\sqrt{(\sin\phi - \sin\theta)^2 + (\cos\phi - \cos\theta)^2}}\right|$$

या
$$= \frac{|\sin(\phi - \theta)|}{\left|\sqrt{\sin^2\phi + \sin^2\theta - 2\sin\phi\sin\theta + \cos^2\phi + \cos^2\theta + 2\cos\phi\cos\theta}\right|}$$

$$= \frac{|\sin(\phi - \theta)|}{\left|\sqrt{(\sin^2\phi + \cos^2\phi) + (\sin^2\theta + \cos^2\theta) - 2(\sin\theta\sin\phi + \cos\theta\cos\phi)}\right|}$$

$$= \frac{|\sin(\phi - \theta)|}{|\sqrt{1 + 1 - 2\cos(\phi - \theta)}|}$$

$$= \frac{|\sin(\phi - \theta)|}{|\sqrt{2 - 2\cos(\phi - \theta)}|}$$

$$= \frac{|\sin(\phi - \theta)|}{\left|\sqrt{2 - 2\left[1 - 2\sin^2\frac{(\phi - \theta)}{2}\right]}\right|}$$

$$= \frac{|\sin(\phi - \theta)|}{\left|\sqrt{2 - 2 + 4\sin^2\frac{(\phi - \theta)}{2}}\right|}$$

$$= \frac{|\sin(\phi - \theta)|}{\left|\sqrt{4\sin^2\frac{(\phi - \theta)}{2}}\right|}$$

$$= \frac{|\sin(\phi - \theta)|}{\left|2\sin\frac{(\phi - \theta)}{2}\right|} = \frac{|\sin(\phi - \theta)|}{2\left|\sin\frac{(\phi - \theta)}{2}\right|}$$ उत्तर

6. रेखाओं $x - 7y + 5 = 0$ और $3x + y = 0$ के प्रतिच्छेद बिन्दु से खींची गई और Y-अक्ष के समान्तर रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल—दी गई रेखाओं के समीकरण,

$$x - 7y + 5 = 0 \quad \text{...(1)}$$

तथा $$3x + y = 0$$

या $$y = -3x \quad \text{...(2)}$$

समीकरण (2) से y का मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$x-7(-3x)+5=0$$

या $\quad x+21x+5=0$

या $\quad 22x+5=0$

या $\quad 22x=-5$

या $\quad x=\frac{-5}{22}$ समीकरण (2) में रखने पर,

$$y=-3\times\left(\frac{-5}{22}\right)=\frac{15}{22}$$

अत: रेखा (1) व (2) का प्रतिच्छेद बिन्दु $=p\left(\frac{-5}{22},\frac{15}{22}\right)$

माना Y-अक्ष के समान्तर रेखा का समीकरण,

$$x=a \qquad \ldots(3)$$

अत: बिन्दु P रेखा (3) को सन्तुष्ट करेगा।

$\therefore \quad \frac{-5}{22}=a \Rightarrow a=\frac{-5}{22}$

a का मान समीकरण (3) में रखने पर रेखा का अभीष्ट समीकरण,

$$x=\frac{-5}{22}$$ उत्तर

7. रेखा $\frac{x}{4}+\frac{y}{6}=1$ पर लम्ब उस बिन्दु से खींची गई रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जहाँ पर यह रेखा Y–अक्ष से मिलती है।

हल—दी गई रेखाओं के समीकरण,

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{6}=1$$

या $\quad 3x+2y=12$

या $\quad 3x+2y-12=0 \qquad \ldots(1)$

Y-अक्ष का समीकरण $x=0 \qquad \ldots(2)$

रेखा (1) व (2) का प्रतिच्छेद बिन्दु ज्ञात करने के लिए

समीकरण (1) में $x=0$ रखने पर

$$3\times0+2y-12=0$$

या $\quad 0+2y=12$

या $\quad 2y=12$

या $\quad y=\frac{12}{2}=6$

रेखा (1) व (2) का प्रतिच्छेद बिन्दु $=P(0,6)$

रेखा (1) के लम्ब रेखा का समीकरण

$$2x-3y+\lambda=0 \qquad \ldots(3)$$

प्रश्नानुसार, रेखा (1) पर लम्ब रेखा बिन्दु $P(0,6)$ से होकर जाती है।

अतः बिन्दु $P(0,6)$ रेखा (3) को सन्तुष्ट करेगा।

$\therefore$ रेखा (3) में $x=0,\ y=6$ रखने पर,

$$2\times 0-3\times 6+\lambda=0$$

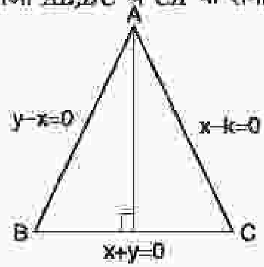
या $0-18+\lambda=0 \Rightarrow \lambda=18$

λ का मान समीकरण (3) में रखने पर रेखा का अभीष्ट समीकरण,

$$\mathbf{2x-3y+18=0}$$ उत्तर

8. रेखाओं $y-x=0, x+y=0$ और $x-k=0$ से बने त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल—माना ΔABC की भुजाओं AB, BC व CA के समीकरण क्रमशः $y-x=0, x+y=0$



तथा $x-k=0$ है।

रेखा $y-x=0$ तथा $x+y=0$ को हल करने पर, $x=0, y=0$

अतः बिन्दु B के निर्देशांक $=(0,0)$

रेखा $x+y=0$ तथा $x-k=0$ को हल करने पर,

$$x=k,\ y=-k$$

अतः बिन्दु C के निर्देशांक $=(k,-k)$

समीकरण $y-x=0$ तथा $x-k=0$ को हल करने पर,

$$x=k,\ y=k$$

अतः बिन्दु A के निर्देशांक $=(k,k)$

रेखा BC की माप = बिन्दु B व C के बीच की दूरी

$$=\sqrt{(k-0)^2+(-k-0)^2}$$

$$=\sqrt{k^2+k^2}$$

$$=\sqrt{2k^2}=k\sqrt{2} \text{ इकाई}$$

रेखा AD की माप = रेखा $BC(x+y=0)$ पर बिन्दु A से डाले गए लम्ब की माप

$$=\frac{k+k}{\sqrt{1^2+1^2}}$$

$$=\frac{2k}{\sqrt{1+1}}=\frac{2k}{\sqrt{2}}=k\sqrt{2} \text{ इकाई}$$

$$\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \text{ आधार} \times \text{ऊँचाई}$$

$$= \frac{1}{2} BC \times AD$$

$$= \frac{1}{2} k\sqrt{2} \times k\sqrt{2}$$

$$= \frac{2}{2} k^2 = k^2 \text{ वर्ग इकाई}$$ उत्तर

9. p का मान ज्ञात कीजिए जिससे तीन रेखाएँ $3x + y - 2 = 0, px + 2y = 3 = 0$ तथा $2x - y - 3 = 0$ एक बिन्दु पर प्रतिच्छेद करें।

हल—दी गई रेखाओं के समीकरण,

$$3x + y - 2 = 0 \quad \ldots(1)$$

$$2x - y - 3 = 0 \quad \ldots(2)$$

तथा $$px + 2y - 3 = 0 \quad \ldots(3)$$

समीकरण (1) व (2) को जोड़ने पर,

$$5x - 5 = 0$$

या $$5x = 5$$

या $$x = \frac{5}{5} = 1$$

x का मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$3 \times 1 + y - 2 = 0$$

या $$3 + y - 2 = 0$$

या $$1 + y = 0$$

या $$y = -1$$

अतः रेखा (1) व (2) का प्रतिच्छेद बिन्दु = (1,–1)

प्रश्नानुसार रेखाएँ (1),(2) व (3) एक ही बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती हैं। अतः बिन्दु (–1,–1) रेखा (3) को सन्तुष्ट करेगा।

∴ $$p \times 1 + 2 \times (-1) - 3 = 0$$

या $$p - 2 - 3 = 0$$

या $$p - 5 = 0$$

या $$p = 5$$ उत्तर

10. यदि तीन रेखाएँ जिनके समीकरण $y = m_1 x + c_1, y = m_2 x + c_2$ और $y = m_3 x + c_3$ हैं, संगामी हैं तो दिखाइए कि—

$$m_1(c_2 - c_3) + m_2(c_3 - c_1) + m_3(c_1 - c_2) = 0$$

हल—दी गई समीकरण,

$$y = m_1 x + c_1 \quad \ldots(1)$$

$$y = m_2 x + c_2 \quad \ldots(2)$$

तथा $$y = m_3x + c_3 \quad ...(3)$$

रेखा (1) व (2) से,

$$m_1x + c_1 = m_2x + c_2$$

या $$c_1 - c_2 = m_2x - m_1x$$

या $$c_1 - c_2 = (m_2 - m_1)x$$

या $$x = \frac{c_1 - c_2}{m_2 - m_1}$$

x का मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$y = m_1 \frac{(c_1 - c_2)}{m_2 - m_1} + c_1$$

$$= \frac{m_1c_1 - m_1c_2 + m_2c_1 - m_1c_1}{m_2 - m_1}$$

$$= \frac{(m_2c_1 - m_1c_2)}{m_2 - m_1}$$

अतः रेखा (1) व (2) का प्रतिच्छेद बिन्दु

$$= P\left[\frac{c_1 - c_2}{m_2 - m_1}, \frac{m_2c_1 - m_1c_2}{m_2 - m_1}\right]$$

रेखा (1), (2) व (3) संगामी हैं। अतः बिन्दु P रेखा (3) को सन्तुष्ट करेगा।

$$\therefore \quad \frac{(m_2c_1 - m_1c_2)}{m_2 - m_1} = m_3 \frac{(c_1 - c_2)}{m_2 - m_1} + c_3$$

या $$\frac{(m_2c_1 + m_1c_2)}{m_2 - m_1} = \frac{m_3(c_1 - c_2) + c_3(m_2 - m_1)}{(m_2 - m_1)}$$

या $$(m_2c_1 + m_1c_2) = m_3(c_1 - c_2) + c_3(m_2 - m_1)$$

या $$c_3(m_2 - m_1) - (m_2c_1 - m_1c_2) + m_3(c_1 - c_2) = 0$$

या $$c_3m_2 - c_3m_1 - m_2c_1 + m_1c_2 + m_3(c_1 - c_2) = 0$$

या $$m_1c_2 - c_3m_1 + c_3m_2 - m_2c_1 + m_3(c_1 - c_2) = 0$$

या $$m_1(c_2 - c_3) + m_2(c_3 - c_1) + m_3(c_1 - c_2) = 0$$ **इति सिद्धम्**

11. बिन्दु (3,2) से जाने वाली उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए, जो रेखा $x - 2y = 3$ से 45° का कोण बनाती है।

हल—बिन्दु (3,2) से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण

$$(y - 2) = m(x - 3) \quad ...(1)$$

दी गई रेखा का समीकरण,

$$x - 2y = 3 \quad ...(2)$$

समीकरण (1) की प्रवणता $(m_1) = m$

तथा रेखा 2 की प्रवणता, $(m_2) = -\frac{x \text{ का गुणांक}}{y \text{ का गुणांक}} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$

प्रश्नानुसार, रेखा (1) व (2) के बीच कोण $(\theta) = 45°$

सूत्र $\tan\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$ से,

या $\tan 45° = \frac{m - \frac{1}{2}}{1 + m \times \frac{1}{2}}$

या $1 = \frac{m - \frac{1}{2}}{1 + \frac{m}{2}}$

या $1 + \frac{m}{2} = m - \frac{1}{2}$

या $1 + \frac{1}{2} = m - \frac{m}{2}$

या $\frac{3}{2} = \frac{m}{2}$

या $m = 3$

m का मान समीकरण (1) में रखने पर रेखा का अभीष्ट समीकरण,

$y - 2 = 3(x - 3)$

या $y - 2 = 3x - 9$

या $3x - y - 9 + 2 = 0$

या $3x - y - 7 = 0$

या $3x - y = 7$ उत्तर

12. रेखाओं $4x + 7y - 3 = 0$ और $x - 3y + 1 = 0$ के प्रतिच्छेद बिन्दु से जाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो अक्षों से समान अन्तःखण्ड बनाती है।

हल—दी गई रेखाओं के समीकरण,

$4x + 7y - 3 = 0$ ...(1)

$2x - 3y + 1 = 0$ ...(2)

समीकरण (2) में 2 की गुणा करने पर,

$4x - 6y + 2 = 0$ ...(3)

समीकरण (1) में से समीकरण (3) घटाने पर,

$13y - 5 = 0$

या $13y = 5$

या $$y=\frac{5}{13}$$

y का मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$4x+7\times\frac{5}{13}-3=0$$

या $$4x+\frac{35}{13}-3=0$$

या $$4x+\frac{35-39}{13}=0$$

या $$4x-\frac{4}{13}=0$$

या $$4x=\frac{4}{13}$$

या $$x=\frac{4}{4\times 13}=\frac{1}{13}$$

अत: रेखा (1) व (2) का प्रतिच्छेद बिन्दु $P\left(\frac{1}{13},\frac{5}{13}\right)$ है।

अक्षों से समान अन्त:खण्ड (a) बनाने वाली रेखा का समीकरण,

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{a}=1\Rightarrow x+y=a \quad ...(3)$$

रेखा (3) प्रतिच्छेद बिन्दु P से होकर जाती है। अत:

$$\frac{1}{13}+\frac{5}{13}=a$$

या $$\frac{1+5}{13}=a$$

या $\frac{6}{13}=a\Rightarrow a=\frac{6}{13}$ समीकरण (3) में रखने पर,

$$x+y=\frac{6}{13}$$

या $$13x+13y=6$$ उत्तर

13. दर्शाइए कि मूल बिन्दु से जाने वाली और रेखा $y=mx+c$ से θ कोण बनाने वाली रेखा का समीकरण $\frac{y}{x}=\pm\frac{m\pm\tan\theta}{1\mp m\tan\theta}$ है।

हल—मूल बिन्दु (0,0) से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण

$$y-0=m_1(x-0)$$

या $$y=m_1x \quad ...(1)$$

तथा दी गई रेखा का समीकरण,

$$y=mx+c \quad ...(2)$$

∵ रेखा (1) व (2) के बीच का कोण θ है, अतः

$$\tan\theta = \frac{m_1 - m}{1 + m_1 m}$$

या $\tan\theta + m_1 m \tan\theta = m_1 - m$

या $m + \tan\theta = m_1 - m_1 m \tan\theta$

या $m + \tan\theta = m_1 (1 - m\tan\theta)$

या $m_1 = \dfrac{m + \tan\theta}{1 - m\tan\theta}$

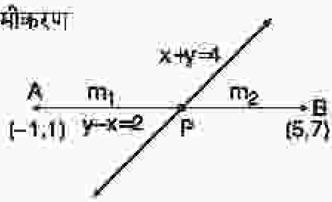
m_1 का मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$y = x \times \frac{m + \tan\theta}{1 - m\tan\theta}$$

या $\dfrac{y}{x} = \dfrac{m + \tan\theta}{1 - m\tan\theta}$ इति सिद्धम्

14. बिन्दु (–1,1) और (5,7) को मिलाने वाले रेखाखण्ड को रेखा $x + y = 4$ किस अनुपात में विभाजित करती है?

हल—बिन्दु (–1,1) व (5,7) को मिलाने वाली रेखा का समीकरण



$$y - 1 = \frac{7-1}{5+1}(x+1)$$

या $y - 1 = \dfrac{6}{6}(x+1)$

या $y - 1 = x + 1$

या $y - x = 2$ ...(1)

दी गई रेखा $x + y = 4$ ...(2)

समीकरण (1) व (2) को हल करने पर, $x = 1, y = 3$

अतः रेखा (1) व (2) के प्रतिच्छेद बिन्दु P के निर्देशांक = (1,3) हैं।

माना रेखा $x + y = 4$ बिन्दुओं (–1,1) व (5,7) को मिलाने वाली रेखा $y - x = 2$ को बिन्दु P पर m_1 व m_2 के अनुपात में विभाजित करती है। अतः

अन्तः विभाजन सूत्र

$$P(h,k) = \left(\frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2}\right) \text{ से}$$

यहाँ $P(h,k) = p(1,3)$

$(x_1, y_1) = (-1,1), (x_2, y_2) = (5,7)$

अतः $P(1,3) = \left(\dfrac{m_1 \times 5 + m_2 \times (-1)}{m_1 + m_2}, \dfrac{m_1 \times 7 + m_2 \times 1}{m_1 + m_2}\right)$

या $$P(1,3)=\left(\frac{5m_1-m_2}{m_1+m_2},\frac{7m+m_2}{m_1+m_2}\right)$$

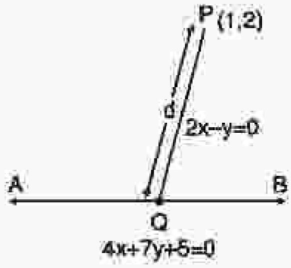
या $$\frac{5m_1-m_2}{m_1+m_2}=1 \text{ तथा } \frac{7m_1+m_2}{m_1+m_2}=3m_1+m_2$$

या $$5m_1-m_2=m_1+m_2 \text{ तथा } 7m_1+m_2=3(m_1+m_2)$$

$$5m_1-m_2=m_2+m_2 \quad \text{तथा} \quad 7m_1+m_2=3m_1+3m_2$$

या $$4m_1=2m_2 \text{ तथा } 7m_1-3m_1=3m_2-m_2$$

या $$\frac{m_1}{m_2}=\frac{2}{4} \text{ तथा } 4m_1=2m_2$$



या $$\frac{m_1}{m_2}=\frac{1}{2} \text{ तथा } \frac{m_1}{m_2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$\therefore$ $$m_1:m_2=1:2$$ उत्तर

15. बिन्दु (1,2) से रेखा $4x+7y+5=0$ की $2x-y=0$ के अनुदिश दूरी ज्ञात कीजिए।

हल—माना दिए गए बिन्दु $P(1,2)$ से रेखा $4x+7y+5=0$ की रेखा $2x-y=0$ अनुदिश दूरी (d) है।

दी गई रेखाओं के समीकरण, ...(1)

$$4x+7y+5=0$$

तथा $$2x-y=0 \Rightarrow y=2x \qquad ...(2)$$

समीकरण (2) से y का मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$4x+7\times 2x+5=0$$

या $$4x+14x+5=0$$

या $$18x+5=0$$

या $$18x=-5$$

या $$x=\frac{-5}{18}$$ समीकरण (2) में रखने पर,

$$y=2\times\left(\frac{-5}{18}\right)=\frac{-10}{18}$$

अत: रेखा (1) व (2) का प्रतिच्छेद बिन्दु $Q=\left(\frac{-5}{18},\frac{-10}{18}\right)$

अतः बिन्दु $P(1,2)$ से रेखा (1) की रेखा (2) के अनुदिश दूरी

$$= \text{बिन्दु } (1, 2) \text{ व } \left(\frac{-5}{18}, \frac{-10}{18}\right) \text{ के बीच की दूरी}$$

$$d = \sqrt{\left(\frac{-5}{18} - 1\right)^2 + \left(\frac{-10}{18} - 2\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{-5-18}{18}\right)^2 + \left(\frac{-10-36}{18}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(-\frac{23}{18}\right)^2 + \left(\frac{-46}{18}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{529}{324} + \frac{2116}{324}}$$

$$= \sqrt{\frac{2645}{324}} = \sqrt{\frac{5 \times 529}{324}} = \frac{23\sqrt{5}}{18} \text{ इकाई}$$

16. बिन्दु $(-1,2)$ से खींची जा सकने वाली उस रेखा की दिशा ज्ञात कीजिए जिसका रेखा $x + y = 4$ से प्रतिच्छेद बिन्दु दिए बिन्दु से 3 इकाई की दूरी पर है।

हल—माना बिन्दु $(-1,2)$ से खींची जाने वाली रेखा की प्रवणता $= m$ है

तब रेखा का समीकरण

$$y - 2 = m(x+1) \text{ होगा}$$

या $$y - 2 = mx + m$$

या $$y = mx + m + 2 \quad \ldots(1)$$

दी गई अन्य रेखा $x + y = 4 \quad \ldots(2)$

समीकरण (1) व (2) को हल करने के लिए समीकरण (2) से $y = 4 - x$ समीकरण (1) में रखने पर,

$$4 - 2 - m = mx + x$$

या $$2 - m = (m+1)x$$

या $$x = \frac{2-m}{m+1}$$

x का मान समीकरण (2) में रखने पर,

$$y = 4 - \frac{2-m}{m+1}$$

$$= \frac{4m + 4 - 2 + m}{m+1}$$

$$y = \frac{5m+2}{m+1}$$

अतः रेखा (1) व (2) का प्रतिच्छेद बिन्दु $= \left(\frac{2-m}{m+1}, \frac{5m+2}{m+1}\right)$

प्रश्नानुसार, बिन्दु $\left(\frac{2-m}{m+1}, \frac{5m+2}{m+1}\right)$ व $(-1,2)$ के बीच की दूरी $= 3$

या $$\sqrt{\left(\frac{2-m}{m+1}+1\right)^2+\left(\frac{5m+2}{m+1}-2\right)^2}=3$$

या $$\sqrt{\left(\frac{2-m+m+1}{m+1}\right)^2+\left(\frac{5m+2-2m-2}{m+1}\right)^2}=3$$

या $$\sqrt{\left(\frac{3}{m+1}\right)^2+\left(\frac{3m}{m+1}\right)^2}=3$$

या $$\sqrt{\frac{9}{(m+1)^2}+\frac{9m^2}{(m+1)^2}}=3$$

या $$\sqrt{\frac{9+9m^2}{(m+1)^2}}=3$$

या $$\frac{9+9m^2}{(m+1)^2}=3^2$$

या $$\frac{9+9m^2}{(m+1)^2}=9$$

या $$\frac{9+9m^2}{m^2+2m+1}=9$$

या $$9+9m^2=9m^2+18m+9$$

या $$0=18m$$

या $$m=0$$

$$\tan\theta=0$$

$$\tan\theta=\tan 0^\circ$$

$$\theta=0^\circ$$

अत: रेखा X-अक्ष के समान्तर अथवा Y-अक्ष के लम्बवत है।

17. किसी बिन्दु के लिए रेखा को दर्पण मानते हुए बिन्दु (3, 8) का रेखा $x+3y=7$ में प्रतिबिम्ब ज्ञात कीजिए।

हल—दी गई रेखा का समीकरण

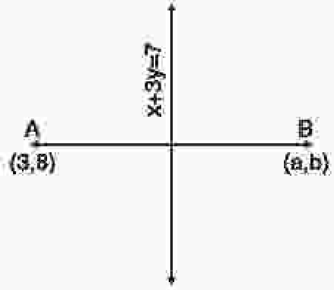
$$x+3y=7 \qquad \ldots(1)$$

माना बिन्दु A (3,8) का रेखा दर्पण में प्रतिबिम्ब बिन्दु $B(a,b)$ है।

अत: रेखा, (1) रेखा AB का लम्ब समद्विभाजक होगी

रेखा AB की प्रवणता $=\frac{b-8}{a-3}$

तथा रेखा (1) की प्रवणता $= -\frac{1}{3}$



रेखा (1), रेखा AB पर लम्ब है,

$\therefore$ $$\frac{b-8}{a-3} \times \left(-\frac{1}{3}\right) = -1$$

या $$\left(\frac{b-8}{a-3}\right) \times \frac{1}{3} = 1$$

या $$\frac{b-8}{3a-9} = 1$$

या $$b-8 = 3a-9$$

या $$3a-b = 9-8$$

या $$3a-b = 1 \qquad \ldots(2)$$

रेखा AB का मध्य बिन्दु $= \left(\frac{a+3}{2}, \frac{b+8}{2}\right)$ जो रेखा (1) पर भी पड़ता है। अत: यह बिन्दु रेखा (1) को सन्तुष्ट करेगा।

$\therefore$ $$\frac{a+3}{2} + 3\left(\frac{b+8}{2}\right) = 7$$

या $$\frac{a+3}{2} + \frac{3b+24}{2} = 7$$

या $$a+3+3b+24 = 14$$

या $$a+3b = -13 \qquad \ldots(3)$$

समीकरण (1) में 3 की गुणा करके समीकरण (3) में जोड़ने पर,

$$10a = -10$$

या $$a = -1$$

a का मान समीकरण (3) में रखने पर,

$$-1+3b = -13$$

या $$3b = -13+1$$

या $$3b = -12$$

या $$b = -4$$

$\therefore$ बिन्दु $B(a,b) = (-1,-4)$

अत: दिए गए बिन्दु का दी गई रेखा में प्रतिबिम्ब $(-1,-4)$ है। **उत्तर**

18. यदि रेखाएँ $y = 3x+1$ और $2y = x+3$ रेखा $y = mx+4$ पर समान रूप से आनत हों तो m का मान ज्ञात कीजिए।

हल—दी गई रेखाएँ

$$y = 3x+1 \qquad \ldots(1)$$

$$2y = x+3 \Rightarrow y = \frac{x}{2} + \frac{3}{2} \qquad \ldots(2)$$

तथा $$y = mx + 4 \qquad ...(3)$$

रेखा (1) की प्रवणता $(m_1) = 3$

रेखा (2) की प्रवणता $(m_2) = \frac{1}{2}$

तथा रेखा (3) की प्रवणता $(m_3) = m$

प्रश्नानुसार, रेखा (1) व (3) के बीच का कोण = रेखा (2) व (3) के बीच का कोण

$$\left|\frac{m_1 - m_3}{1 + m_1 m_3}\right| = \left|\frac{m_2 - m_3}{1 + m_2 m_3}\right|$$

या $$\left|\frac{3 - m}{1 + 3 \times m}\right| = \left|\frac{\frac{1}{2} - m}{1 + \frac{1}{2} \times m}\right|$$

या $$\left|\frac{3 - m}{1 + 3m}\right| = \left|\frac{\frac{1 - 2m}{2}}{\frac{2 + m}{2}}\right|$$

या $$\frac{3 - m}{1 + 3m} = \pm\left(\frac{1 - 2m}{2 + m}\right)$$

यदि $$\frac{3 - m}{1 + 3m} = \left(\frac{1 - 2m}{2 + m}\right)$$

$$(3 - m)(2 + m) = (1 - 2m)(1 + 3m)$$

या $$6 + 3m - 2m - m^2 = 1 + 3m - 2m - 6m^2$$

या $$6 + m - m^2 = 1 + m - 6m^2$$

या $$5 = -5m^2$$

या $$m^2 = -\frac{5}{5}$$

या $$m^2 = -1$$

या $m = \sqrt{-1}$ जोकि वास्तविक संख्या नहीं हैं।

यदि $$\frac{3 - m}{1 + 3m} = -\left(\frac{1 - 2m}{2 + m}\right)$$

तब $$(3 - m)(2 + m) = -(1 - 2m)(1 + 3m)$$

$$6 + 3m - 2m - m^2 = -(1 + 3m - 2m - 6m^2)$$

या $$6 + m - m^2 = -(1 + m - 6m^2)$$

या $$6 + m - m^2 = -1 - m + 6m^2$$

या $$6m^2 + m^2 - m - m - 1 - 6 = 0$$

या $$7m^2 - 2m - 7 = 0$$

श्रीधराचार्य सूत्र से,

$$m=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\times 7(-7)}}{2\times 7}$$

$$=\frac{2\pm\sqrt{4+196}}{14}$$

$$=\frac{2\quad\sqrt{200}}{14}$$

$$=\frac{2\pm 10\sqrt{2}}{14}$$

$$=\frac{2(1\pm 5\sqrt{2})}{14}$$

$$=\frac{1\pm 5\sqrt{2}}{7}$$ उत्तर

19. यदि एक चर बिन्दु $P(x, y)$ की रेखाओं $x+y-5=0$ तथा $3x-2y+7=0$ से लाम्बिक दूरियों का योग सदैव 10 रहे तो दर्शाइए कि P अनिवार्य रूप से एक रेखा पर गमन करता है।

हल—दी गई रेखाओं का समीकरण,

$$x+y-5=0 \quad \ldots(1)$$

$$3x-2y+7=0 \quad \ldots(2)$$

बिन्दु $P(x, y)$ की रेखा (1) से लाम्बिक दूरी $p_1=\frac{x+y-5}{\sqrt{1^2+1^2}}$

$$=\frac{x+y-5}{\sqrt{2}}$$

तथा बिन्दु $P(x, y)$ की रेखा (2) से लाम्बिक दूरी $p_2=\frac{3x-2y+7}{\sqrt{3^2+2^2}}$

$$=\frac{3x-2y+7}{\sqrt{13}}$$

प्रश्नानुसार,

$$p_1+p_2=10$$

या $$\frac{x+y-5}{\sqrt{2}}+\frac{3x-2y+7}{\sqrt{13}}=10$$

या $$\sqrt{13}(x+y-5)+\sqrt{2}(3x-2y+7)=10\sqrt{26}$$

या $$\sqrt{13}x+\sqrt{13}y-5\sqrt{13}+3\sqrt{2}x-2\sqrt{2}y+7\sqrt{2}=10\sqrt{26}$$

$$(\sqrt{13}+3\sqrt{2})x+(\sqrt{13}-2\sqrt{2})y+(7\sqrt{2}-5\sqrt{13}-10\sqrt{26})=0$$

जो कि एक रेखा का समीकरण है। अतः बिन्दु P एक रेखा पर गमन करता है। इति सिद्धम्

20. समान्तर रेखाओं $9x+6y-7=0$ और $3x+2y+6=0$ से समदूरस्थ रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल—दी गई समान्तर रेखाओं के समीकरण,

$$9x+6y-7=0 \qquad ...(1)$$

तथा $$3x+2y+6=0 \qquad ...(2)$$

माना बिन्दु $P(x_1, y_1)$ रेखा (1) व (2) से समदूरस्थ है।

$\therefore$ बिन्दु P की रेखा (1) से लाम्बिक दूरी = बिन्दु P की रेखा (2) से लाम्बिक दूरी

$$\frac{|9x_1+6y_1-7|}{\sqrt{9^2+6^2}}=\frac{|3x_1+2y_1+6|}{\sqrt{3^2+2^2}}$$

या $$\frac{|9x_1+6y_1-7|}{\sqrt{81+36}}=\frac{|3x_1+2y_1+6|}{\sqrt{9+4}}$$

या $$\frac{|9x_1+6y_1-7|}{\sqrt{117}}=\frac{|3x_1+2y_1+6|}{\sqrt{13}}$$

या $$\frac{|9x_1+6y_1-7|}{3\sqrt{13}}=\frac{|3x_1+2y_1+6|}{\sqrt{13}}$$

या $$\frac{|9x_1+6y_1-7|}{3}=|3x_1=2y_1+6|$$

या $$|9x_1=6y_1-7|=3|3x_1+2y_1+6|$$

या $$9x_1+6y_1-7=\pm 3(3x_1+2y_1+6)$$

यदि $$9x_1+6y_1-7=+3(3x_1+2y_1+6)$$

या $$9x_1+6y_1-7=9x_1+6y_1+18$$

या $-7=18$ जो कि सम्भव नहीं है।

अतः यदि $$9x_1+6y_1-7=-3(3x_1+2y_1+6)$$

या $$9x_1+6y_1-7=-9x_1-6y_1-18$$

या $$9x_1+9x+6y_1+6y_1+18-7=0$$

या $$18x_1+12y_1=11=0$$

अतः अभीष्ट रेखा $\mathbf{18x+12y+11=0}$ उत्तर

21. बिन्दु (1,2) से होकर जाने वाली एक प्रकाश किरण X-अक्ष के बिन्दु A से परावर्तित होती है और परावर्तित किरण बिन्दु (5,3) से होकर जाती है। बिन्दु A के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

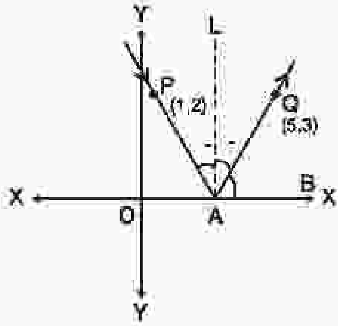
हल—माना X-अक्ष पर स्थित बिन्दु A के निर्देशांक $=(a,0)$ है।

बिन्दु A पर X-अक्ष के लम्बवत् रेखा AL खींची।

हम जानते हैं कि—

आयतन कोण = परावर्तन कोण

$$\angle PAL=\angle QAL=\theta$$



माना $\angle QAX = \alpha$

$$\therefore \quad \angle OAP = 180^\circ - (\alpha + 2\theta)$$
$$= 180^\circ - [\alpha + 2(90^\circ - \alpha)]$$
$$= 180^\circ - [\alpha + 180^\circ - 2\alpha]$$
$$= 180^\circ - \alpha - 180^\circ + 2\alpha$$
$$= \alpha$$

$\therefore \angle PAX = 180^\circ - \alpha$

अब, रेखा AQ की प्रवणता $= \dfrac{3-0}{5-a}$

या $$\tan\alpha = \frac{3}{5-a}$$

रेखा PA की प्रवणता $= \dfrac{2-0}{1-a}$

$$\tan(180^\circ - \alpha) = \frac{2}{1-a}$$

या $$-\tan\alpha = \frac{2}{1-a}$$

या $$\tan\alpha = \frac{2}{a-1} \quad \ldots(2)$$

समीकरण (1) व (2) से,

$$\frac{3}{5-a} = \frac{2}{a-1}$$
$$3a - 3 = 10 - 2a$$

या $$3a + 2a = 10 + 3$$

या $$5a = 13$$

या $$a = \frac{13}{5}$$

अत: बिन्दु A के निर्देशांक $\left(\dfrac{13}{5}, 0\right)$ हैं **उत्तर**

22. दिखाइए कि $(\sqrt{a^2-b^2},0)$ और $(-\sqrt{a^2-b^2},0)$ बिन्दुओं से रेखा $\frac{x}{a}\cos\theta+\frac{y}{b}\sin\theta=1$ पर खींचे गए लम्बों की लम्बाइयों का गुणनफल b^2 है।

हल—इस प्रश्न के लिए **अभ्यास 14.6** के प्रश्न संख्या-11 का हल देखिए।

23. एक व्यक्ति समीकरणों $2x-3y+4=0$ और $3x+4y-5=0$ से निरूपित रेखीय पथों के संधि बिन्दु पर खड़ा है और समीकरण $6x-7y+8=0$ से निरूपित पथ पर न्यूनतम समय में पहुँचना चाहता है। उसके द्वारा अनुसरित पथा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल—दी गई पथरूपी रेखाओं के समीकरण,

$$2x-3y+4=0 \qquad ...(1)$$

$$3x+4y-5=0 \qquad ...(2)$$

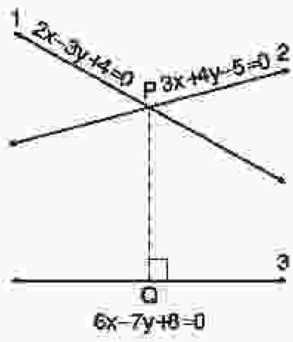
समीकरण (1) में 4 तथा (2) में 3 की गुणा करने पर,

$$8x-12y+16=0 \qquad ...(3)$$

$$9x+12y-15=0 \qquad ...(4)$$

समीकरण (3) व (4) को जोड़ने पर, $17x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{17}$

x का मान समीकरण (2) में रखने पर,



$$3\times\left(-\frac{1}{17}\right)+4y-5=0$$

$$-\frac{3}{17}+4y-5=0$$

या $$4y=5+\frac{3}{17}$$

या $$4y=\frac{88}{17}$$

या $$y=\frac{88}{4\times 17}$$

या $$y=\frac{22}{17}$$

अत: रेखाओं (1) व (2) से निरूपित सरल रेखीय पथों का सन्धि बिन्दु $P\left(-\frac{1}{17},\frac{22}{17}\right)$ है।

तीसरे पथा का समीकरण $6x-7y+8=0 \qquad ...(3)$

पथ (1) व (2) के प्रतिच्छेद बिन्दु P से पथ (3) या पथ $6x-7y+8=0$ पर न्यूनतम समय में बिन्दु P से पथ (3) पर लाम्बिक पथ PQ द्वारा ही पहुँचा जा सकता है।

$\therefore$ रेखा (पथ) $6x-7y+8=0$ के लम्ब रेखा का समीकरण

$$7x+6y+\lambda=0 \qquad ...(4)$$

$\because$ बिन्दु P रेखा (4) पर स्थित है।

∴ $$7\times\left(-\frac{1}{17}\right)+6\times\left(\frac{22}{17}\right)+\lambda=0$$

या $$\frac{-7}{17}+\frac{132}{17}+\lambda=0$$

या $$\frac{-7+132}{17}+\lambda=0$$

$$\frac{125}{17}+\lambda=0$$

या $$\lambda=-\frac{125}{17}$$

λ का मान समीकरण (4) में रखने पर,

$$7x+6y-\frac{125}{17}=0$$

या $$119x+102y-125=0$$

या $$\mathbf{119x+102y=125}$$ उत्तर

24. बिन्दु $(0,\alpha)$ से होकर जाने वाली उन दो रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए, जिन पर बिन्दु $(2\alpha,2\alpha)$ से डाले गए लम्बों की लम्बाइयाँ α है।

हल—बिन्दु $(0,\alpha)$ से होकर जाने वाली रेखा का व्यापक समीकरण,

$$y-\alpha=m(x-0)$$

या $$y-\alpha=mx$$

या $$mx-y+\alpha=0 \qquad ...(1)$$

रेखा (1) पर बिन्दु $(2\alpha,2\alpha)$ से डाले गए लम्ब की माप

या $$=\frac{m\times2\alpha-2\alpha+\alpha}{\sqrt{m^2+1}}$$

या $$=\frac{2m\alpha-\alpha}{\sqrt{m^2+1}}$$

प्रश्नानुसार, $$\frac{2m\alpha-\alpha}{\sqrt{m^2+1}}=\alpha$$

या $$2m\alpha-\alpha=\alpha\sqrt{m^2+1}$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर,

$$(2m\alpha-\alpha)^2=\alpha^2(\sqrt{m^2+1})^2$$

या $$4m^2\alpha^2+\alpha^2-4m\alpha^2=\alpha^2(m^2+1)$$

या $$4m^2\alpha^2+\alpha^2-4m\alpha^2=\alpha^2m^2+\alpha^2$$

या $$3m^2\alpha^2-4m\alpha^2=0$$

या $$m\alpha^2(3m-4)=0$$

$\Rightarrow$ $m=0$ या $3-4=0$

$$m = 0 \text{ या } m = \frac{4}{3}$$

यदि $m = 0$ तो रेखा का अभीष्ट समीकरण,

$$0 \times x - y + \alpha = 0$$

या $$0 - y + \alpha = 0$$

या $$y - \alpha = 0$$ उत्तर

यदि, $m = \frac{4}{3}$, तो रेखा का अभीष्ट समीकरण,

$$\frac{4}{3} \times x - y + \alpha = 0$$

या $$4x - 3y + 3\alpha = 0$$ उत्तर

25. समीकरण $4x - 5y = 7$ को अन्तःखण्ड के रूप में व्यक्त कीजिए तथा उसका Y-अक्ष पर कटा अन्तःखण्ड लिखिए।

हल—दी गई रेखा का समीकरण,

$$4x - 5y = 7$$

या $$\frac{4x}{7} - \frac{5y}{7} = \frac{7}{7}$$

या $\dfrac{x}{\frac{7}{4}} + \dfrac{y}{-\frac{7}{5}} = 1$ जो रेखा का अन्तःखण्ड रूप है।

रेखा (1) का Y-अक्ष पर कटा अन्तःखण्ड $= \frac{-7}{5}$ मात्रक उत्तर

26. बिन्दु (3,4) तथा (–2,5) से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए। यदि यह रेखा बिन्दु (a, b) से होकर जाती है, तो सिद्ध कीजिए— $a + 5b = 23$

हल—माना बिन्दु $A(x_1, y_1) = (3, 4)$

तथा $B(x_2, y_2) = (-2, 5)$

बिन्दु A व B से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण,

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

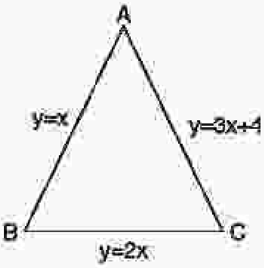
या $$y - 4 = \frac{5 - 4}{-2 - 3}(x - 3)$$

या $$y - 4 = \frac{1}{-5}(x - 3)$$

या $$-5y + 20 = x - 3$$

या $$x + 5y = 20 + 3$$

या $$x + 5y = 23 \qquad \ldots(1)$$



प्रश्नानुसार, रेखा (1) बिन्दु (a,b) से होकर जाती है। अतः बिन्दु (a,b) रेखा (1) को सन्तुष्ट करेगा। समीकरण (1) में $x=a, y=b$ रखने पर

$$a+5b=23$$ इति सिद्धम्

27. उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसकी भुजाओं के समीकरण $y=x$, $y=2x, y=3x+4$ हैं।

हल—माना ΔABC की भुजाओं AB, BC तथा CA के समीकरण क्रमशः

$$y=x \qquad ...(1)$$

तथा $$y=2x \qquad ...(2)$$

$$y=3x+4 \qquad ...(3)$$

समीकरण (1) व (2) को हल करने पर, बिन्दु B के निर्देशांक $=(0,0)$

समीकरण (2) व (3) को हल करने पर, बिन्दु C के निर्देशांक $=(-4,-8)$

तथा समीकरण (1) व (3) को हल करने पर, बिन्दु A के निर्देशांक $=(-2,-2)$

अतः $$A\equiv(0,0)=(x_1, y_1)$$

$$B\equiv(-4,-8)=(x_2, y_2)$$

$$C\equiv(-2,-2)=(x_3, y_3)$$

ΔABC का क्षेत्रफल $=\frac{1}{2}|[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]|$ से

$$=\frac{1}{2}|[0(-8+2)+(-4)(-2-0)+(-2)(0+8)]|$$

$$=\frac{1}{2}|[0-4\times(-2)-2\times(8)]|$$

$$=\frac{1}{2}|[8-16]|=\frac{1}{2}|-8|=\frac{1}{2}\times 8$$

$$=4 \text{ वर्ग इकाई}$$ उत्तर

28. यदि रेखाएँ $y=mx+c$ तथा $2x-y+3=0$ परस्पर लम्ब हैं, तो m का मान ज्ञात कीजिए।

हल—दी गई रेखाओं के समीकरण,

$$y=mx+c \qquad ...(1)$$

$$2x-y+3=0 \qquad ...(2)$$

रेखा (1) की प्रवणता $(m_1)=m$

रेखा (2) की प्रवणता $(m_2) = \dfrac{-x \text{ का गुणांक}}{y \text{ का गुणांक}}$

$$= \frac{-2}{-1} = 2$$

प्रश्नानुसार, रेखा (1) व (2) परस्पर लम्ब हैं।

$\therefore$ रेखा (1) की प्रवणता $\times$ रेखा (2) की प्रवणता $= -1$

या $$m \times 2 = -1$$

या $$m = -\frac{1}{2}$$ उत्तर

29. सिद्ध कीजिए कि रेखाओं $a(a-b)y - b(a+b)x = b^3$ $a(a+b)y - b(a-b)x = a^3$, जहाँ पर $a > b > 0$, के बीच का कोण $\theta = \tan^{-1}\left[\dfrac{4a^2b^2}{a^4 - b^4}\right]$ है।

हल—दी गई रेखाओं के समीकरण,

$$a(a-b)y - b(a+b)x = b^3 \qquad \ldots(1)$$

तथा $$a(a+b)y - b(a-b)x = a^3 \qquad \ldots(2)$$

रेखा (1) की प्रवणता $(m_1) = \dfrac{-x \text{ का गुणांक}}{y \text{ का गुणांक}}$

$$= -\frac{-b(a+b)}{a(a-b)} = \frac{b(a+b)}{a(a-b)}$$

रेखा (2) की प्रवणता $(m_2) = -\dfrac{-b(a-b)}{a(a+b)} = \dfrac{b(a-b)}{a(a+b)}$

माना रेखा (1) व (2) के बीच का कोण θ है।

$\therefore$ $$\tan\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

या $$= \frac{\dfrac{b(a+b)}{a(a-b)} - \dfrac{b(a-b)}{a(a+b)}}{1 + \dfrac{b(a+b)}{a(a-b)} \times \dfrac{b(a-b)}{a(a+b)}}$$

या $$= \frac{\dfrac{ab(a+b)^2 - ab(a-b)^2}{a^2(a+b)(a-b)}}{1 + \dfrac{b^2}{a^2}}$$

या $$=\frac{\dfrac{ab(a^2+b^2+2ab)-ab(a^2+b^2-2ab)}{a^2(a^2-b^2)}}{\dfrac{a^2+b^2}{a^2}}$$

या $$=\frac{\dfrac{ab[a^2+b^2+2ab-a^2-b^2+2ab]}{a^2(a^2-b^2)}}{\dfrac{a^2+b^2}{a^2}}$$

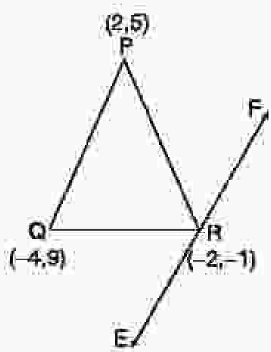
या $$=\frac{\dfrac{ab\times 4ab}{a^2(a^2-b^2)}}{\dfrac{a^2+b^2}{a^2}}=\frac{4a^2b^2}{(a^2+b^2)(a^2-b^2)}$$

$$=\frac{4a^2b^2}{a^4-b^4}$$

या $$\theta=\tan^{-1}\left[\frac{4a^2b^2}{a^4-b^4}\right]$$ इति सिद्धम्

30. ΔPQR के शीर्ष $P(2,5), Q(-4,9)$ और $R(-2,-1)$ हैं। भुजा PQ के समान्तर सम्मुख शीर्ष से खींची गई रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल—दिया है ΔPQR में,



शीर्ष P के निर्देशांक $=(2,5)$

शीर्ष Q के निर्देशांक $=(-4,9)$

तथा शीर्ष R के निर्देशांक $=(-2-1)$

भुजा PQ का समीकरण,

सूत्र, $y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$ से,

$$y-5=\frac{9-5}{-4-2}(x-2)$$

या $$y-5=\frac{4}{-6}(x-2)$$

या $$y-5=-\frac{2}{3}(x-2)$$

या $$3y-15=-2x+4$$

या $$2x+3y-15-4=0$$

या $$2x+3y-19=0 \quad ...(1)$$

भुजा PQ अर्थात् रेखा (1) के समान्तर रेखा का समीकरण,

$$2x+3y=\lambda \quad ...(2)$$

रेखा (2) बिन्दु $B(-2,-1)$ से होकर जाती है। अतः रेखा (2) में

$x=-2, y=-1$ रखने पर,

$$2\times(-2)+3\times(-1)=\lambda$$

या $$-4-3=\lambda$$

या $$-7=\lambda \Rightarrow \lambda=-7$$

λ का मान समीकरण (2) में रखने पर,

$$2x+3y=-7$$

या $$2x+3y+7=0$$ उत्तर

31. सिद्ध कीजिए कि रेखाएँ $3x-4y=4, 4x+3y=22$ और $5x+8y=36$ एक बिन्दुगामी हैं तथा पहली और दूसरी रेखाएँ परस्पर लम्ब हैं।

हल—दी गई रेखाएँ,

$$3x-4y=4 \qquad ...(1)$$

$$4x+3y=22 \qquad ...(2)$$

$$5x+8y=36 \qquad ...(3)$$

समीकरण (1) में 3 तथा समीकरण (2) में 4 की गुणा करने पर,

$$9x-12y=12 \qquad ...(4)$$

$$16x+12y=88 \qquad ...(5)$$

समीकरण (4) व (5) को जोड़ने पर,

$$25x=100 \Rightarrow x=\frac{100}{25}=4$$

x का मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$3\times4-4\times y=4$$

या $$12-4=4y$$

या $$8=4y \Rightarrow y=\frac{8}{4}=2$$

अतः रेखा (1) व (2) का प्रतिच्छेद बिन्दु, $=(4,2)$

तीनों रेखाओं के एक बिन्दुगामी होने के लिए रेखा (3) बिन्दु (4,2) को सन्तुष्ट करेगी।

अतः रेखा (3) में $x=4$ तथा $y=2$ रखने पर,

$$\text{L.H.S} = 5x+8y = 5\times4+8\times2$$

$$=20+16$$

$$=36=\text{R.H.S}$$

अतः दी गई तीनों रेखाएँ एक बिन्दुगामी हैं। इति सिद्धम्

अब, रेखा (1) की प्रवणता $(m_1) = \dfrac{-x \text{ का गुणांक}}{y \text{ का गुणांक}}$

$$=\frac{-3}{-4}=\frac{3}{4}$$

अब, रेखा (2) की प्रवणता $(m_2) = \frac{-x \text{ का गुणांक}}{y \text{ का गुणांक}}$

$$m_2 = -\frac{4}{3}$$

$$m_1 m_2 = \frac{3}{4} \times \left(\frac{-4}{3}\right) = -\frac{3 \times 4}{4 \times 3} = -1$$

अतः पहली व दूसरी रेखा परस्पर लम्ब हैं। **इति सिद्धम्**

बहुविकल्पीय प्रश्न

नोट—बहुविकल्पीय प्रश्नों के उत्तर जानने के लिए पाठ्य पुस्तक के पृष्ठ संख्या 308, 309 व 310 का अवलोकन कीजिए।

इकाई-7 मेन्सुरेशन (Mensuration)

15

लम्बवृत्तीय बेलन
(Right Circular Cylinder)

अभ्यास 15.1

1. एक लम्बवृत्तीय बेलन के आधार का क्षेत्रफल 154 सेमी^{2} है। यदि ऊँचाई 10 सेमी हो, तो बेलन का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—लम्बवृत्तीय बेलन के आधार का क्षेत्रफल $= 154$ सेमी^{2}

तथा बेलन की ऊँचाई $= 10$ सेमी

बेलन का आयतन $=$ आधार का क्षेत्रफल $\times$ ऊँचाई

$= 154 \times 10 =$ **1540 सेमी^{3}** **उत्तर**

2. एक लम्बवृत्तीय बेलन के आधार का क्षेत्रफल 38.5 वर्ग सेमी है। बेलन की ऊँचाई 10 सेमी है, बेलन का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—लम्बवृत्तीय बेलन के आधार का क्षेत्रफल $= 38.5$ वर्ग सेमी

तथा बेलन की ऊँचाई $= 10$ सेमी

अतः बेलन का आयतन $=$ आधार का क्षेत्रफल $\times$ ऊँचाई

$= 38.5 \times 10 =$ **385 घन सेमी** **उत्तर**

3. दो समान ऊँचाई के लम्बवृत्तीय बेलनों की आधार त्रिज्याओं में 2 : 3 का अनुपात है। इसके आयतनों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—लम्बवृत्तीय बेलनों की ऊँचाइयाँ $h_1 = h_2 = h$ (माना)

तथा त्रिज्याओं में अनुपात $= 2 : 3$

माना पहले बेलन की त्रिज्या $r_1 = 2r$

तब दूसरे बेलन की त्रिज्या $r_2 = 3r$

अतः पहले बेलन का आयतन $(V_1) = \pi r_1^2 h_1 = \pi (2r)^2 h = 4\pi r^2 h$

तथा दूसरे बेलन का आयतन $(V_2) = \pi r_2^2 h_2 = \pi (3r)^2 h = 9\pi r^2 h$

$$\therefore \quad \frac{V_1}{V_2} = \frac{4\pi r^2 h}{4\pi r^2 h} = \frac{4}{9}$$

अतः $\mathbf{V_1 : V_2 = 4 : 9}$ **उत्तर**

4. एक बेलन के आधार की त्रिज्या 3 सेमी तथा ऊँचाई 7 सेमी है। इस बेलन का वक्रपृष्ठ ज्ञात कीजिए। $\left(\pi = \frac{22}{7}\right.$ **लीजिए**$\left.\right)$

हल– दिया है—बेलन के आधार की त्रिज्या $(r) = 3$ सेमी तथा ऊँचाई $(h) = 7$ सेमी

बेलन का वक्र पृष्ठ $= 2\pi rh$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 3 \times 7 = \mathbf{132}$ **सेमी**^{2} **उत्तर**

5. एक बेलन का आयतन 448 π सेमी^{3} तथा ऊँचाई 7 सेमी है। इसका वक्रपृष्ठ व सम्पूर्ण पृष्ठ ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—बेलन का आयतन $(V) = 448\pi$ सेमी^{3} तथा ऊँचाई $(h) = 7$ सेमी

माना बेलन के आधार की त्रिज्या $= r$ सेमी

बेलन का आयतन $= \pi r^2 h$

$448\pi = \pi r^2 \times 7$ या $448 = r^2 \times 7$

या $r^2 = \frac{448}{7}$ या $r^2 = 64$

या $r = \sqrt{64} = 8$ सेमी

बेलन का वक्र पृष्ठ $= 2\pi rh$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 8 \times 7 = 2 \times 22 \times 8$

$= \mathbf{352}$ **सेमी**^{2} **उत्तर**

बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठ $= 2\pi r(r+h)$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 8(8+7)$

$= \frac{44 \times 8 \times 15}{7} = \frac{5280}{7}$

$= \mathbf{754.28}$ **सेमी**^{2} **उत्तर**

6. एक ठोस बेलन की त्रिज्या और ऊँचाई क्रमशः 4 सेमी और 10 सेमी हैं। उस बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठ ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है— बेलन की त्रिज्या $(r) = 4$ सेमी

तथा बेलन की ऊँचाई $(h) = 10$ सेमी

बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठ $= 2\pi r(r+h)$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 4(4+10) = \frac{44}{7} \times 4 \times 14$

$= 44 \times 4 \times 2 = \mathbf{352}$ **सेमी**^{2} **उत्तर**

7. एक लम्बवृत्तीय बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठ 1540 सेमी^{2} है। इसकी ऊँचाई आधार की त्रिज्या की चार गुनी है। बेलन के आधार की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठ $= 1540$ सेमी^{2}

माना बेलन के आधार की त्रिज्या $(r) = x$ सेमी

तब बेलन की ऊँचाई $(h) = 4x$ सेमी

बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठ $= 2\pi r(r+h) = 1540$

या $\quad 2\times\frac{22}{7}\times x(x+4x) = 1540$

या $\quad x\times 5x = \frac{1540\times 7}{2\times 22}$ या $5x^2 = \frac{1540\times 7}{22\times 2}$

या $\quad x^2 = \frac{1540\times 7}{5\times 22\times 2}$ या $x^2 = 7\times 7 = 49$

या $\quad x = \sqrt{49} = 7$ सेमी

अत: बेलन के आधार की त्रिज्या $r = x = 7$ सेमी **उत्तर**

8. एक बेलनाकार बर्तन के आधार की परिधि 132 सेमी और उसकी ऊँचाई 25 सेमी है। इस बर्तन में कितने लीटर पानी आ सकता है? (1000 सेमी^{3} = 1 लीटर)

हल– दिया है—बेलनाकार बर्तन के आधार की परिधि = 132 सेमी तथा ऊँचाई = 25 सेमी

माना बेलनाकार बर्तन के आधार की त्रिज्या $= r$ सेमी

$\therefore$ आधार की परिधि $= 2\pi r = 132$

या $\quad 2\times\frac{22}{7}\times r = 132$ या $r = \frac{132\times 7}{2\times 22} = 21$ सेमी

बेलनाकार बर्तन का आयतन $= \pi r^2 h$

$= \frac{22}{7}\times(21)^2\times 25 = \frac{22}{7}\times 21\times 21\times 25$

$= 34650$ सेमी^{3} $= \frac{34650}{1000}$ लीटर

= 34.65 लीटर **उत्तर**

9. लकड़ी के एक बेलनाकार पाइप का आंतरिक व्यास 24 सेमी है और बाहरी व्यास 28 सेमी है। इस पाइप की लम्बाई 35 सेमी है। इस पाइप का द्रव्यमान ज्ञात कीजिए। यदि 1 सेमी^{3} लकड़ी का द्रव्यमान 0.6 ग्राम है।

हल– दिया है—लकड़ी के खोखले बेलनाकार पाइप का आंतरिक व्यास = 24 सेमी

$\therefore$ आंतरिक त्रिज्या $r_2 = \frac{24}{2} = 12$ सेमी

तथा बाह्य व्यास = 28 सेमी

$\therefore$ बाह्य त्रिज्या $(r_1) = \frac{28}{2} = 14$ सेमी

पाइप की लम्बाई $(h) = 35$ सेमी

खोखले पाइप का आयतन $= \pi h(r_1 + r_2)(r_1 - r_2)$

$= \frac{22}{7}\times 35(14+12)(14-12)$

$= 22\times 5\times 26\times 2 = 5720$ सेमी^{3}

$\because$ 1 सेमी^{3} लकड़ी का द्रव्यमान = 0.6 ग्राम

$\therefore$ 5720 सेमी^{3} लकड़ी का द्रव्यमान $= 5720\times 0.6$ ग्राम $= 3432$ ग्राम

$= \frac{3432}{1000}$ किग्रा **= 3.432 किग्रा** **उत्तर**

10. एक सोफ्ट ड्रिंक (soft drink) दो प्रकार के पैकों में उपलब्ध—(i) लम्बाई 5 सेमी और चौड़ाई 4 सेमी वाले एक आयताकार आधार का टिन का डिब्बा जिसकी ऊँचाई 15 सेमी है और (ii) व्यास 7 सेमी वाले वृत्तीय आधार और 10 सेमी ऊँचाई वाला एक प्लास्टिक का बेलनाकार डिब्बा। किस डिब्बे की धारिता अधिक है और कितनी अधिक है?

हल– दिया है—आयताकार आधार वाले डिब्बे की लम्बाई $= 5$ सेमी

चौड़ाई $= 4$ सेमी

तथा ऊँचाई $= 15$ सेमी

अतः आयताकार डिब्बे का आयतन $(V_1) =$ लम्बाई $\times$ चौड़ाई $\times$ ऊँचाई

$= 15 \times 4 \times 15 = 300$ सेमी^{3}

बेलनाकार डिब्बे के वृत्तीय आधार का व्यास $= 7$ सेमी

$\therefore$ त्रिज्या $(r) = \frac{7}{2}$ सेमी तथा ऊँचाई $(h) = 10$ सेमी

अतः बेलनाकार डिब्बे का आयतन $(V_2) = \pi r^2 h$

$$= \frac{22}{7} \times \left(\frac{7}{2}\right)^2 \times 10 = \frac{22}{7} \times \frac{7 \times 7}{2 \times 2} \times 10$$

$$= 11 \times 7 \times 5 = 385 \text{ सेमी}^3$$

स्पष्ट है, **बेलनाकार डिब्बे का आयतन (धारिता) अधिक है।** **उत्तर**

$$V_2 - V_1 = 385 - 300 = 85 \text{ सेमी}^3$$

अतः बेलनाकार डिब्बे की धारिता **85 सेमी^{3}** अधिक है। **उत्तर**

11. यदि एक बेलन का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल 94.2 सेमी^{2} है और उसकी ऊँचाई 5 सेमी है, तो ज्ञात कीजिए–

(i) आधार की त्रिज्या (ii) बेलन का आयतन ($\pi = 3.14$ लीजिए)

हल– दिया है—बेलन का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल (वक्र पृष्ठ) $= 94.2$ सेमी^{2}

तथा ऊँचाई $(h) = 5$ सेमी

माना बेलन की त्रिज्या $= r$ सेमी

(i) हम जानते हैं कि—

बेलन का वक्रपृष्ठ $= 2\pi rh$

या $94.2 = 2 \times 3.14 \times r \times 5$

या $r = \frac{94.2}{2 \times 3.14 \times 5} =$ **3 सेमी** **उत्तर**

(ii) बेलन का आयतन $= \pi r^2 h$

$= 3.14 \times 3^2 \times 5 = 3.14 \times 9 \times 5$

$=$ **141.3 सेमी^{3}** **उत्तर**

12. ऊँचाई 14 सेमी वाले एक लम्बवृत्तीय बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल 88 सेमी^{2} है। बेलन के आधार का व्यास ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—बेलन की ऊँचाई $(h) = 14$ सेमी

बेलन का वक्रपृष्ठीय क्षेत्रफल $= 88$ सेमी^{3}

माना बेलन के आधार की त्रिज्या $= r$ सेमी

हम जानते हैं कि—

बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi rh$

या $$88 = 2 \times \frac{22}{7} \times r \times 14$$

या $$r = \frac{88 \times 7}{2 \times 22 \times 14} = 1 \text{ सेमी}$$

अतः बेलन के आधार का व्यास $= 2 \times$ त्रिज्या

$= 2 \times 1 = $ **2 सेमी** उत्तर

13. धातु की एक चादर से 1 मीटर ऊँची और 140 सेमी व्यास के आधार वाली एक बंद बेलनाकार टंकी बनाई जानी है। इस कार्य के लिए कितने वर्ग मीटर चादर की आवश्यकता होगी?

हल– दिया है—बेलनाकार टंकी की ऊँचाई $(h) = 1$ मीटर

टंकी के आधार का व्यास $(d) = 140$ सेमी $= \frac{140}{100}$ मीटर $= 1.4$ मीटर

अतः टंकी के आधार की त्रिज्या $(r) = \frac{d}{2} = \frac{1.4}{2} = 0.7$ मीटर

टंकी बनाने में आवश्यक चादर = टंकी का सम्पूर्ण पृष्ठ

$$= 2\pi r(r+h) = 2 \times \frac{22}{7} \times 0.7\,(0.7+1)$$

$$= 2 \times 22 \times 0.1 \times 1.7$$

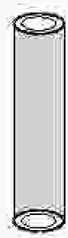
$=$ **7.48 वर्ग मीटर** उत्तर

14. धातु का एक पाइप 77 सेमी लम्बा है। इसके एक अनुप्रस्थकाट का आन्तरिक व्यास 4 सेमी है और बाहरी व्यास 4.4 सेमी है (देखिए आकृति)। ज्ञात कीजिए–

(i) आन्तरिक वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

(ii) बाहरी वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

(iii) कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल



हल– दिया है—धातु के पाइप की लम्बाई $(h) = 77$ सेमी

पाइप की बाहरी त्रिज्या $(r_1) = \frac{4.4}{2}$ सेमी $= 2.2$ सेमी

तथा आन्तरिक त्रिज्या $(r_2) = \frac{4}{2}$ सेमी $= 2$ सेमी

(i) पाइप का आन्तरिक वक्रपृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi r_2 h = 2 \times \frac{22}{7} \times 2 \times 77$

$= 2 \times 22 \times 2 \times 11 = $ **968 सेमी^{2}** उत्तर

(ii) पाइप का बाहरी वक्र पृष्ठ $= 2\pi r_1 h = 2 \times \frac{22}{7} \times 2.2 \times 77$

$$= 44 \times 2.2 \times 11$$

$=$ **1064.8 सेमी^{2}** उत्तर

(iii) पाइप के आधारों का क्षेत्रफल = बाह्य सिरों का क्षेत्रफल − आन्तरिक सिरों का क्षेत्रफल

$$= 2\pi r_1^2 - 2\pi r_2^2 = 2\pi(r_1^2 - r_2^2)$$

$$= 2\pi(r_1 + r_2)(r_1 - r_2)$$

$$= 2 \times \frac{22}{7}(2.2 + 2)(2.2 - 2)$$

$$= \frac{44}{7} \times 4.2 \times 0.2$$

$$= 44 \times 0.6 \times 0.2 = 5.28 \text{ सेमी}^2$$

अतः बेलन का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = बाहरी वक्रपृष्ठ + आन्तरिक वक्रपृष्ठ + आधारों का क्षेत्रफल

$$= 1064.8 + 968 + 5.28$$

$$= \mathbf{2038.08 \text{ सेमी}^2}$$ **उत्तर**

15. एक ठोस बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल 924 सेमी^{2} है। इसका वक्रपृष्ठीय क्षेत्रफल, सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल का 2/3 भाग है। बेलन का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल– माना ठोस बेलन के आधार की त्रिज्या $= r$ सेमी

तथा ऊँचाई $= h$ सेमी

ठोस बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठ = वक्र पृष्ठ + 2 × आधार का क्षेत्रफल

या $924 = 2\pi rh + 2\pi r^2$

या $924 = 2\pi r(h + r)$

या $2\pi r(h + r) = 924$ ...(1)

ठोस बेलन का वक्र पृष्ठ $= 2\pi rh$

प्रश्नानुसार, $\frac{\text{वक्र पृष्ठ}}{\text{सम्पूर्ण पृष्ठ}} = \frac{2}{3}$

$\frac{2\pi rh}{2\pi r(h+r)} = \frac{2}{3}$ या $\frac{h}{h+r} = \frac{2}{3}$

या $3h = 2h + 2r$

या $3h - 2h = 2r$

या $h = 2r$ ...(2)

h का मान समीकरण (1) में रखने पर,

$2 \times \pi r(2r + r) = 924$

या $2\pi r \times 3r = 924$ या $6\pi r^2 = 924$

या $6 \times \frac{22}{7} r^2 = 924$ या $r^2 = \frac{924 \times 7}{6 \times 22}$

या $r^2 = 49$ $\Rightarrow$ $r = \sqrt{49}$ $\Rightarrow$ $r = 7$ सेमी

r का मान समीकरण (2) में रखने पर

$h = 2 \times 7 = 14$ सेमी

अतः ठोस बेलन का आयतन $= \pi r^2 h$

$$= \frac{22}{7} \times 7^2 \times 14 = \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 14$$

$$= 22 \times 7 \times 14 = \mathbf{2156} \text{ सेमी}^3$$ उत्तर

16. 7 सेमी कोर वाली लकड़ी के घन से अधिकतम आयतन का लम्बवृत्तीय बेलन बनाया जाता है। बेलन का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—लकड़ी के घन की कोर = 7 सेमी

इस घन से बनाये गए अधिकतम आयतन वाले लम्बवृत्तीय बेलन की त्रिज्या $(r) = \frac{7}{2}$ सेमी होगी

तथा ऊँचाई $(h) = 7$ सेमी

अतः बेलन का आयतन $= \pi r^2 h$

$$= \frac{22}{7} \times \left(\frac{7}{2}\right)^2 \times 7 = \frac{22}{7} \times \frac{7 \times 7}{2 \times 2} \times 7$$

$$= \frac{11 \times 49}{2} = \frac{539}{2} = \mathbf{269.5} \text{ सेमी}^3$$ उत्तर

17. एक आयताकार कागज की लम्बाई 22 सेमी तथा चौड़ाई 12 सेमी है। कागज को दो प्रकार से मोड़कर दो बेलनों के वक्रपृष्ठ बनाए जाते हैं। इस प्रकार बने बेलनों के आयतनों का अंतर ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—आयताकार कागज की लम्बाई = 22 सेमी तथा चौड़ाई = 12 सेमी

स्थिति-I : जब कागज की चौड़ाई को बेलन का आधार बनाया जाता है।

तब बेलन की परिधि $(2\pi r) = 12$ (कागज की चौड़ाई)

या $2 \times \frac{22}{7} \times r = 12$ या $r = \frac{7 \times 12}{2 \times 22}$

$$r = \frac{21}{11} \text{ सेमी}$$

तथा बेलन की ऊँचाई (h) = कागज की लम्बाई = 22 सेमी

अतः बेलन का आयतन $(V_1) = \pi r^2 h$

$$= \frac{22}{7} \times \left(\frac{21}{11}\right)^2 \times 22 = \frac{22}{7} \times \frac{21 \times 21}{11 \times 11} \times 22$$

$$= 2 \times 3 \times 21 \times 2 = \mathbf{252} \text{ सेमी}^3$$

स्थिति-II : जब कागज की लम्बाई को बेलन का आधार बनाया जाता है।

तब बेलन की परिधि = 22 सेमी या $2\pi r = 22$

या $\frac{2 \times 22}{7} \times r = 22$ या $r = \frac{22 \times 7}{2 \times 22} = \frac{7}{2}$ सेमी

तथा बेलन की ऊँचाई (h) = कागज की चौड़ाई = 12 सेमी

बेलन का आयतन $(V_2) = \pi r^2 h$

$$= \frac{22}{7} \times \left(\frac{7}{2}\right)^2 \times 12 = \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \times 12$$

$$= 22 \times 21 \text{ सेमी}^3 = 462 \text{ सेमी}^3$$

अत: बेलनों के आयतनों में अन्तर $= V_2 - V_1 = (462 - 252)$ सेमी^{3}

$= \mathbf{210}$ **सेमी^{3}** उत्तर

18. एक 42 मीटर लम्बे लोहे के पाइप का बाहरी तथा भीतरी व्यास क्रमश: 8.5 सेमी और 6.5 सेमी है। उसके निर्माण में लगे लोहे का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल- दिया है—लोहे के पाइप की लम्बाई $(h) = 42$ मीटर $= 4200$ सेमी

पाइप का बाहरी व्यास $= 8.5$ सेमी

$\therefore$ बाहरी त्रिज्या $r_1 = \frac{8.5}{2}$ सेमी

तथा पाइप का भीतरी व्यास $= 6.5$ सेमी

अत: भीतरी त्रिज्या $r_2 = \frac{6.5}{2}$ सेमी

पाइप के निर्माण में लगे लोहे का आयतन = पाइप का बाहरी आयतन − पाइप का भीतरी आयतन

$$= \pi r_1^2 h - \pi r_2^2 h = \pi h (r_1^2 - r_2^2)$$

$$= \pi h (r_1 + r_2)(r_1 - r_2)$$

$$= \frac{22}{7} \times 4200 \left(\frac{8.5}{2} + \frac{6.5}{2}\right)\left(\frac{8.5}{2} - \frac{6.5}{2}\right)$$

$$= 22 \times 600 \left(\frac{15.0}{2}\right)\left(\frac{2.0}{2}\right)$$

$$= 22 \times 600 \times \frac{15}{2} \times 1 = 11 \times 600 \times 15$$

$= 11 \times 9000 = \mathbf{99000}$ **सेमी^{3}** उत्तर

19. 10 मीटर गहरे एक बेलनाकार बर्तन के आन्तरिक वक्रपृष्ठ को पेंट कराने का व्यय ₹ 2200 है। यदि पेंट कराने की दर ₹ 20 प्रति वर्ग मीटर^2 है, तो ज्ञात कीजिए—

(i) बर्तन का आंतरिक वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

(ii) आधार की त्रिज्या

(iii) बर्तन की धारिता

हल- दिया है—बेलनाकार बर्तन की गहराई $(h) = 10$ मीटर

बर्तन के आन्तरिक वक्रपृष्ठ को पेंट कराने का खर्च = ₹ 2200

पेंट कराने की दर = ₹ 20 प्रति वर्ग मीटर

(i) बर्तन का आन्तरिक वक्रपृष्ठ $= \frac{2200}{20} = \mathbf{110}$ **मीटर^2** उत्तर

(ii) माना बर्तन के आधार की त्रिज्या $= r$ मीटर है।

तब, बर्तन का आन्तरिक वक्रपृष्ठ $= 2\pi rh = 110$

या $2 \times \frac{22}{7} \times r \times 10 = 110$

या $r = \frac{110 \times 7}{2 \times 22 \times 10} = \frac{7}{4} = \mathbf{1.75}$ **मीटर** उत्तर

(iii) बर्तन की धारिता $=\pi r^2 h=\frac{22}{7}\times\left(\frac{7}{4}\right)^2\times 10$

$=\frac{22}{7}\times\frac{7\times 7}{4\times 4}\times 10=96.25$ मीटर^3

=96.25 किलो लीटर उत्तर

20. ऊँचाई 1 मीटर वाले एक बेलनाकार बर्तन की धारिता 15.4 लीटर है। इसको बनाने के लिए कितने वर्ग मीटर धातु की शीट की आवश्यकता होगी?

हल– दिया है—बेलनाकार बर्तन की ऊँचाई $(h)=1$ मीटर $=100$ सेमी

तथा बेलनाकार बर्तन की धारिता $=15.4$ लीटर $=15.4\times 1000$ सेमी^{3} $=15400$ सेमी^{3}

माना बर्तन के आधार की त्रिज्या $=r$ सेमी

तब, बर्तन की धारिता $=\pi r^2 h=15400$

या $\frac{22}{7}\times r^2\times 100=15400$

या $r^2=\frac{15400\times 7}{22\times 100}$

या $r^2=49$

या $r=\sqrt{49}=7$ सेमी

बेलनाकार बर्तन को बनाने में आवश्यक धातु की शीट = बर्तन का सम्पूर्ण पृष्ठ

$=2\pi r(h+r)$

$=2\times\frac{22}{7}\times 7(100+7)=44\times 107$

$=4708$ सेमी^{2}

$=\frac{4708}{1000}$ मीटर^2 $=$ **0.4708 मीटर^2** उत्तर

21. सीसे की एक पेंसिल (lead pencil) लकड़ी के एक बेलन के अभ्यंतर में ग्रेफाइट (graphite) से बने ठोस बेलन को डाल कर बनाई गई है। पेंसिल का व्यास 7 मिमी है और ग्रेफाइट का व्यास 1 मिमी है। यदि पेंसिल की लम्बाई 14 सेमी है, तो लकड़ी का आयतन और ग्रेफाइट का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल– प्रश्नानुसार, पेंसिल के अभ्यंतर बेलनाकार ग्रेफाइट का व्यास = 1 मिमी

$\therefore$ ग्रेफाइट की त्रिज्या $(r_1)=\frac{1}{2}$ मिमी $=\frac{1}{2\times 10}$ सेमी $=\frac{1}{20}$ सेमी

ग्रेफाइट की ऊँचाई (h) = पेंसिल की लम्बाई

$=14$ सेमी

अतः ग्रेफाइट का आयतन $=\pi r_1^2 h=\frac{22}{7}\times\left(\frac{1}{20}\right)^2\times 14$

$=\frac{22}{7}\times\frac{1}{400}\times 14=\frac{11}{100}$ सेमी^{3} $=0.11$ सेमी^{3}

पेंसिल का व्यास = 7 मिमी

$\therefore$ पेंसिल की त्रिज्या $(r_2)=\frac{7}{2}$ मिमी $=\frac{7}{2\times 10}$ सेमी $=\frac{7}{20}$ सेमी

पेंसिल का आयतन $= \pi r_2^2 h$

$$= \frac{22}{7} \times \left(\frac{7}{20}\right)^2 \times 14$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{7 \times 7}{20 \times 20} \times 14 = \frac{11 \times 7 \times 7}{100}$$

$$= \frac{539}{100} = \mathbf{5.39} \text{ **सेमी**}^3$$ उत्तर

22. एक अस्पताल (hospital) के एक रोगी को प्रतिदिन 7 सेमी व्यास वाले एक बेलनाकार कटोरे में सूप (soup) दिया जाता है। यदि वह कटोरा सूप से 4 सेमी ऊँचाई तक भरा जाता है, तो इस अस्पताल में 250 रोगियों के लिए प्रतिदिन कितना सूप तैयार किया जाता है?

हल– दिया है—बेलनाकार कटोरे का व्यास = 7 सेमी

$\therefore$ त्रिज्या $r = \frac{7}{2}$ सेमी

कटोरे में सूप की ऊँचाई $(h) = 4$ सेमी

$\therefore$ 1 कटोरे में दिए गए सूप का आयतन $= \pi r^2 h$

$$= \frac{22}{7} \times \left(\frac{7}{2}\right)^2 \times 4 = \frac{22}{7} \times \frac{7 \times 7}{2 \times 2} \times 4$$

$$= 154 \text{ सेमी}^3$$

$\therefore$ 250 कटोरों में दिए गए सूप का आयतन $= 250 \times 154$ सेमी^{3}

$$= 38500 \text{ सेमी}^3$$

या $= \frac{38500}{1000}$ लीटर $=$ **38.5 लीटर** उत्तर

23. एक रोलर (roller) का व्यास 84 सेमी है और लम्बाई 120 सेमी है। एक खेल के मैदान को एक बार समतल करने के लिए रोलर को 500 चक्कर लगाने पड़ते हैं। खेल के मैदान का मीटर^2 में क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—रोलर का व्यास = 84 सेमी

$\therefore$ त्रिज्या $(r) = \frac{84}{2} = 42$ सेमी $= 0.42$ मीटर

रोलर की लम्बाई $(h) = 120$ सेमी $= 1.2$ मीटर

रोलर का वक्र पृष्ठ $= 2\pi rh$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 0.42 \times 1.2$$

$$= 44 \times 0.06 \times 1.2 = 3.168 \text{ मीटर}^2$$

अतः रोलर द्वारा 1 चक्कर में समतल किया गया मैदान $= 3.168$ मीटर^2

$\therefore$ रोलर द्वारा 500 चक्कर में समतल किया गया मैदान $= 3.168 \times 500$

$$= 1584.00 \text{ मीटर}^2$$

$$= \mathbf{1584} \text{ **मीटर**}^2$$ उत्तर

24. किसी बेलनाकार स्तम्भ का व्यास 50 सेमी है और ऊँचाई 3.5 मीटर है। ₹12.50 प्रति मीटर^2 की दर से इस स्तम्भ के वक्रपृष्ठ पर पेंट कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—बेलनाकार स्तम्भ का व्यास = 50 सेमी

$\therefore$ त्रिज्या $(r) = \frac{50}{2} = 25$ सेमी $= \frac{25}{100}$ मीटर $= 0.25$ मीटर

तथा बेलनाकार स्तम्भ की ऊँचाई $(h) = 3.5$ मीटर

बेलनाकार स्तम्भ का वक्र पृष्ठ $= 2\pi rh$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 0.25 \times 3.5$

$= 44 \times 0.25 \times 0.5 = 5.5$ मीटर^2

अतः ₹12.50 प्रति मीटर^2 की दर से स्तम्भ पर पेंट कराने का व्यय $= 5.5 \times 12.5$

= ₹ 68.75 **उत्तर**

25. एक लम्बवृत्तीय बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल 4.4 मीटर^2 है। यदि बेलन के आधार की त्रिज्या 0.7 मीटर है, तो उसकी ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—लम्बवृत्तीय बेलन का वक्र पृष्ठ = 4.4 मीटर^2

बेलन के आधार की त्रिज्या $(r) = 0.7$ मीटर

माना बेलन की ऊँचाई $= h$ मीटर

$\therefore$ बेलन का वक्र पृष्ठ $= 2\pi rh = 4.4$

या $2 \times \frac{22}{7} \times 0.7 \times h = 4.4$

या $4.4h = 4.4$

या $h = \frac{4.4}{4.4} = 1$ **मीटर** **उत्तर**

26. किसी वृत्ताकार कुएँ का आन्तरिक व्यास 3.5 मीटर है और यह 10 मीटर गहरा है। ज्ञात कीजिए—

(i) आन्तरिक वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल।

(ii) ₹40 प्रति मीटर^2 की दर से इसके वक्रपृष्ठ पर प्लास्टर कराने का व्यय।

हल– दिया है—कुएँ का आन्तरिक व्यास = 3.5 मीटर

$\therefore$ आन्तरिक त्रिज्या $(r) = \frac{3.5}{2}$ मीटर

कुएँ की गहराई $(h) = 10$ मीटर

(i) कुएँ का आन्तरिक वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi rh$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times 10$

$= 22 \times 5 =$ **110 मीटर**^{2} **उत्तर**

(ii) ₹40 प्रति मीटर^2 की दर से कुएँ के आन्तरिक वक्र पृष्ठ पर प्लास्टर कराने का व्यय

$= 110 \times 40 =$ **₹ 4400** **उत्तर**

27. गरम पानी रखने वाले एक संयत्र में 28 मीटर लम्बाई और 5 सेमी व्यास वाला एक बेलनाकार पाइप है। इस संयंत्र में गर्मी देने वाला कुल कितना पृष्ठ है?

हल– दिया है—बेलनाकार पाइप की लम्बाई $(h) = 28$ मीटर

तथा पाइप का व्यास $= 5$ सेमी

$\therefore$ त्रिज्या $= \frac{5}{2}$ सेमी $= \frac{5}{2 \times 100}$ मीटर

बेलनाकार पाइप का वक्र पृष्ठ $= 2\pi rh$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{5}{2 \times 100} \times 28$$

$$= \frac{22 \times 5 \times 4}{100} = \frac{440}{100} = 4.4 \text{ मीटर}^2$$

अत: संयंत्र में गर्मी देने वाला कुल पृष्ठ $= 4.4$ मीटर^2 है। **उत्तर**

28. 14.85 किग्रा धातु से 6 मिमी व्यास का कितना लम्बा तार बन सकता है, जबकि 1 घन सेमी धातु की संहति 7.5 ग्राम है?

हल– दिया है—7.5 ग्राम धातु $= 1$ घन सेमी

$\therefore$ 1 ग्राम धातु $= \frac{1}{7.5}$ घन सेमी

$\therefore$ 14.85 किग्रा $= 14850$ ग्राम धातु $= \frac{1}{7.5} \times 14850 = 1980$ घन सेमी

तार का व्यास $= 6$ मिमी $= \frac{6}{10}$ सेमी $= 0.6$ सेमी

$\therefore$ तार की त्रिज्या $(r) = \frac{0.6}{2} = 0.3$ सेमी

माना तार की लम्बाई $= h$ सेमी

अत: तार का आयतन $= \pi r^2 h = 1980$

या $\frac{22}{7} \times (0.3)^2 \times h = 1980$ या $\frac{22}{7} \times 0.09 \times h = 1980$

या $$h = \frac{1980 \times 7}{22 \times 0.09} = \frac{90 \times 7}{0.09} = \frac{9000 \times 7}{9}$$

$$= 7000 \text{ सेमी} = \frac{7000}{100} \text{ मीटर} = 70 \text{ मीटर}$$

अत: धातु से बनने वाले तार की लम्बाई 70 मीटर है। **उत्तर**

29. यदि 2 सेमी आन्तरिक व्यास के वृत्ताकार नल से जल 6 मीटर/सेकंड की दर से 60 सेमी आधार त्रिज्या के एक बेलनाकार टैंक में प्रवाहित हो रहा है। ज्ञात कीजिए 30 मिनट में टैंक की कितनी ऊँचाई तक जल भरा जाएगा।

हल– नल का व्यास $= 2$ सेमी

$\therefore$ त्रिज्या $(r) = \frac{2}{2} = 1$ सेमी

नल से प्रति सेकण्ड प्रवाहित जल $= 6$ मीटर $= (h) = 600$ सेमी

अत: नल से प्रति सेकण्ड प्रवाहित जल का आयतन $= \pi r^2 h$

$$= \frac{22}{7} \times (1)^2 \times 600 = \frac{13200}{7} \text{ घन सेमी}$$

$\because$ 1 मिनट में प्रवाहित जल $= \dfrac{13200 \times 60}{7}$ घन सेमी

तथा 30 मिनट में प्रवाहित जल $= \dfrac{13200 \times 60 \times 30}{2}$ घन सेमी

बेलनाकार टैंक के आधार की त्रिज्या $(R) = 60$ सेमी

माना टैंक में जल की ऊँचाई $= H$

तब टैंक में जल का आयतन = 30 मिनट में नल से प्रवाहित जल

$$\pi R^2 H = \frac{13200 \times 60 \times 30}{7}$$

या $$\frac{22}{7}(60)^2 \times H = \frac{13200 \times 60 \times 30}{7}$$

या $$\frac{22 \times 60 \times 60}{7} \times H = \frac{13200 \times 60 \times 30}{7}$$

या $$H = \frac{13200 \times 60 \times 30 \times 7}{22 \times 60 \times 60 \times 7} = 300 \text{ सेमी}$$

$$= \frac{300}{100} \text{ मीटर} = 3 \text{ मीटर}$$

अतः **टैंक में जल 3 मीटर ऊँचाई तक भरा जायेगा।** उत्तर

30. 8 सेमी ऊँचे ताँबे के खोखले बेलन को गलाकर 9 सेमी ऊँचा एक ठोस बेलन बनाया जाता है। यदि खोखले बेलन की बाह्य व अंतः त्रिज्याएँ क्रमशः 2 सेमी और 1 सेमी हों, तो ठोस बेलन की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—खोखले बेलन की ऊँचाई $(h_1) = 8$ सेमी

खोखले बेलन की बाह्य त्रिज्या $r_1 = 2$ सेमी

तथा अंतः त्रिज्या $r_2 = 1$ सेमी

अतः खोखले बेलन में प्रयुक्त धातु का आयतन $= \pi h_1 (r_1 + r_2)(r_1 - r_2)$

$$= \frac{22}{7} \times 8(2+1)(2-1)$$

$$= \frac{22}{7} \times 8 \times 3 \times 1 = \frac{22 \times 24}{7} \text{ सेमी}^3$$

खोखले बेलन को गलाकर बनाये गए ठोस बेलन की ऊँचाई $(h_2) = 2$ सेमी

माना ठोस बेलन की त्रिज्या $= r_2$ सेमी

अतः ठोस बेलन का आयतन = खोखले बेलन में प्रयुक्त धातु का आयतन

$$\pi r_2^2 h_2 = \frac{22 \times 24}{7}$$

या $$\frac{22}{7} \times r_2^2 \times 9 = \frac{22 \times 24}{7}$$

या $$r_2^2 = \frac{22 \times 24 \times 7}{22 \times 9 \times 7} \quad \text{या} \quad r_2^2 = \frac{24}{9}$$

या $$r_2 = \sqrt{\frac{24}{9}} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \text{ सेमी}$$ उत्तर

31. यदि एक लम्बवृत्तीय बेलन का व्यास 5% कम कर दिया जाए तो उसकी ऊँचाई में कितने प्रतिशत वृद्धि हो जाएगी, जबकि उसके आयतन में कोई परिवर्तन न हो।

हल– माना बेलन की प्रारम्भिक ऊँचाई $= h$ मात्रक

तथा आरम्भिक व्यास $= x$ मात्रक

$\therefore$ त्रिज्या $= \frac{x}{2}$ मात्रक

$\therefore$ बेलन का आयतन $= \pi r^2 h$

$$= \pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 \times h = \frac{\pi x h}{4} \text{ घन मात्रक}$$

अब बेलन के व्यास में कमी = प्रारम्भिक व्यास का 5%

$$= x \text{ का } 5\% = \frac{x \times 5}{100} = \frac{x}{20}$$

अतः बेलन का नया व्यास $= x - \frac{x}{20} = \frac{19}{20}x$

अतः बेलन की नई त्रिज्या $(r) = \frac{19x}{20 \times 2} = \frac{19x}{40}$ मात्रक

माना बेलन की नई ऊँचाई $= H$ मात्रक

अब बेलन का आयतन $= \pi r^2 H = \pi\left(\frac{19x}{40}\right)^2 H$

प्रश्नानुसार, बेलन का अन्तिम आयतन = बेलन का प्रारम्भिक आयतन

$$\pi\left(\frac{19x}{40}\right)^2 \times H = \frac{\pi x^2 \times h}{4}$$

या $$\frac{\pi \times 361x^2}{1600} H = \frac{\pi x^2 h}{4}$$

या $$H = \frac{\pi x^2 h \times 1600}{\pi \times 361 \times x^2 \times 4}$$

या $$H = \frac{400h}{361}$$

अतः बेलन की ऊँचाई में वृद्धि $= \frac{400h}{361} - h$

$$= \frac{400h - 361h}{361} = \frac{39h}{361}$$

अतः बेलन की ऊँचाई में प्रतिशत वृद्धि $= \frac{\frac{39h}{361}}{h} \times 100\%$

$$= \frac{3900}{361}\% = \mathbf{10.8\%}$$ **उत्तर**

32. 10 मीटर आन्तरिक व्यास का 14 मीटर गहरा कुआँ खोदकर उसकी मिट्टी कुएँ के चारों ओर 5 मीटर की चौड़ाई तक समान रूप से फैलाकर एक चबूतरा बनाया गया है। चबूतरे की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—कुएँ का आन्तरिक व्यास $= 10$ मीटर

$\therefore$ कुएँ की आन्तरिक त्रिज्या $(r) = \frac{10}{2} = 5$ मीटर

कुएँ की गहराई $(h) = 14$ मीटर

कुएँ से निकली मिट्टी का आयतन = कुएँ का आन्तरिक आयतन

$$= \pi r^2 h$$

$$= \frac{22}{7} \times (5)^2 \times 14 = 22 \times 25 \times 2$$

$$= 1100 \text{ मीटर}^3$$

कुएँ के चारों ओर बनाए गए चबूतरे की चौड़ाई $= 5$ मीटर

इस प्रकार बने वृत्तीय चबूतरे की आन्तरिक त्रिज्याएँ = कुएँ की त्रिज्या

$$r = 5 \text{ मीटर}$$

तथा चबूतरे की बाह्य त्रिज्या $r_1 = r + 5$

$$= 5 + 5 = 10 \text{ मीटर}$$

माना चबूतरे की ऊँचाई $= h$ मीटर

चबूतरे का आयतन $= \pi h (r_1 + r)(r_1 - r)$

$$= \pi h (10 + 5)(10 - 5)$$

$$= \pi h \times 15 \times 5 = 75\pi h$$

परन्तु, चबूतरे का आयतन = कुएँ से निकली मिट्टी का आयतन

या $75\pi h = 1100$

या $75 \times \frac{22}{7} \times h = 1100$

या $h = \frac{1100 \times 7}{22 \times 75} = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$ **मीटर** **उत्तर**

33. ज्ञात कीजिए—

(i) एक बेलनाकार पेट्रोल की बंद टंकी का पार्श्व या वक्रपृष्ठीय क्षेत्रफल, जिसका व्यास 4.2 मीटर है और ऊँचाई 4.5 मीटर है।

(ii) इस टंकी को बनाने में कुल कितना इस्पात (steel) लगा होगा, यदि कुल इस्पात का $\frac{1}{12}$ भाग बनाने में नष्ट हो गया है?

हल– दिया है—बेलनाकार पेट्रोल टंकी का व्यास $= 4.2$ मीटर

$\therefore$ त्रिज्या $(r) = \frac{4.2}{2} = 2.1$ मीटर

तथा ऊँचाई $(h) = 4.5$ मीटर

(i) टंकी का पार्श्व या वक्रपृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi r h$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 2.1 \times 4.5 = 44 \times 0.3 \times 4.5$$

$$= \mathbf{59.4 \text{ मीटर}^2}$$ **उत्तर**

(ii) टंकी का सम्पूर्ण पृष्ठ $= 2\pi r (h + r)$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 2.1 (4.5 + 2.1)$$

$$= 44 \times 0.3 \times 6.6 = 87.12 \text{ मीटर}^2$$

माना टंकी बनाने में लगे इस्पात की कुल मात्रा $= x$ मीटर^2

अतः नष्ट हुए इस्पात की मात्रा $= x$ का $\frac{1}{12} = x \times \frac{1}{12} = \frac{x}{12}$

टंकी में लगा शुद्ध इस्पात = टंकी का सम्पूर्ण पृष्ठ

या $$x - \frac{x}{12} = 87.12$$

या $$\frac{12x - x}{12} = 87.12 \quad \text{या} \quad \frac{11x}{12} = 87.12$$

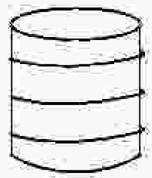
या $$x = \frac{87.12 \times 12}{11}$$

या $$x = \frac{1045.44}{11}$$

या $$x = 95.04 \text{ मीटर}^2$$

अतः **टंकी बनाने में कुल 95.04 मीटर^2 इस्पात लगा।** उत्तर

34. आकृति में, आप एक लैंपशेड का फ्रेम देख रहे हैं। इसे एक सजावटी कपड़े से ढका जाना है। इस फ्रेम के आधार का व्यास 20 सेमी है और ऊँचाई 30 सेमी है। फ्रेम के ऊपर और नीचे मोड़ने के लिए दोनों ओर 2.5 सेमी अतिरिक्त कपड़ा भी छोड़ा जाना है। ज्ञात कीजिए कि लैंपशेड को ढकने के लिए कुल कितने कपड़े की आवश्यकता होगी।



हल– दिया है— लैंपशेड का व्यास = 20 सेमी

$\therefore$ $$\text{त्रिज्या } (r) = \frac{20}{2} = 10 \text{ सेमी}$$

तथा लैंपशेड की ऊँचाई = 30 सेमी

$\because$ लैंपशेड को ढकने के लिए ऊपर व नीचे दोनों ओर 2.5 सेमी कपड़ा मोड़ने के लिए छोड़ा जाता है।

$\therefore$ लैंपशेड को ढकने के लिए आवश्यक लम्बवृत्तीय कपड़े की ऊँचाई

$$h = 30 + 2.5 + 2.5 = 35 \text{ सेमी}$$

अतः लैंपशेड के फ्रेम को ढकने के लिए आवश्यक कपड़ा $= 2\pi rh$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 10 \times 35$$

$$= 44 \times 10 \times 5$$

$$= \mathbf{2200 \text{ सेमी}^2}$$ उत्तर

35. किसी विद्यालय के विद्यार्थियों से एक आधार वाले बेलनाकार कलमदानों को गत्ते से बनाने और सजाने की प्रतियोगिता में भाग लेने के लिए कहा गया। प्रत्येक कलमदान को 3 सेमी त्रिज्या और 10.5 सेमी ऊँचाई का होना था। विद्यालय को इसके लिए

प्रतिभागियों को गत्ता देना था। यदि इसमें 35 प्रतिभागी थे, तो विद्यालय को कितना गत्ता खरीदना पड़ा होगा?

हल– दिया है—बेलनाकार कमलदान की त्रिज्या $(r) = 3$ सेमी

तथा ऊँचाई $(h) = 10.5$ सेमी

अतः एक आधार वाले कमलदान में लगा गत्ता = वक्र पृष्ठ + आधार का क्षेत्रफल

$$= 2\pi rh + \pi r^2$$

$$= \pi r(2h + r)$$

$$= \frac{22}{7} \times 3\,(2 \times 10.5 + 3)$$

$$= \frac{22}{7} \times 3\,(21 + 3) = \frac{22}{7} \times 3 \times 24 \text{ सेमी}^2$$

$\therefore$ 35 कमलदानों के लिए आवश्यक गत्ता $= \frac{22}{7} \times 3 \times 24 \times 35$

$$= 22 \times 3 \times 24 \times 5 = 7920 \text{ सेमी}^2$$

अतः विद्यालय को कुल **7920 सेमी^{2}** गत्ता खरीदना पड़ा होगा। **उत्तर**

36. 4 मिलीमीटर व्यास का ताँबे का तार, 20 सेमी व्यास के 24 सेमी लंबे बेलन पर सर्वत्र एक विधि से लपेटा जाता है, जिससे सम्पूर्ण वक्र पृष्ठ ढक जाए। तार की लम्बाई व उसका आयतन ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—ताँबे के तार का व्यास = 4 मिलीमीटर $= \frac{4}{10}$ सेमी $= 0.4$ सेमी

बेलन का व्यास $= 20$ सेमी

$\therefore$ त्रिज्या $(R) = \frac{20}{2} = 10$ सेमी

तथा बेलन की ऊँचाई (लम्बाई) $h = 24$ सेमी

बेलन पर लपेटे गए तार के फेरों की संख्या $= \frac{\text{बेलन की लम्बाई}}{\text{तार का व्यास}} = \frac{24}{0.4}$

$$= \frac{240}{4} = 60 \text{ फेरे}$$

एक फेरे में लगे तार की लम्बाई = बेलन की परिधि

$$= 2\pi r = 2 \times \pi \times 10 = 20\pi \text{ सेमी}$$

$\therefore$ 60 फेरों में लगे तार की लम्बाई $= 60 \times 20\pi$

$(l) = $ **$1200\,\pi$ सेमी** **उत्तर**

तार का आयतन $= \pi r^2 l = \pi (0.2)^2 \times 1200\pi$

$$= 0.04 \times 1200\pi^2 = 48.00\pi^2$$

$= $ **$48\,\pi^2$ सेमी^{3}** **उत्तर**

37. किसी खोखले बेलन का व्यास 14 सेमी है, उसमें कुछ पानी है। अब इसमें लोहे का एक घनाकार पिंड डुबाया जाता है। यदि पानी की गहराई $8\frac{9}{14}$ सेमी बढ़ जाती है, तो घन की कोर की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल– माना घन की कोर की लम्बाई $= x$ सेमी

$\therefore$ घन का आयतन $= x \times x \times x = x^3$ सेमी^{3}

खोखले बेलन का व्यास $= 14$ सेमी

$\therefore$ त्रिज्या $(r) = \frac{14}{2} = 7$ सेमी

घन को खोखले बेलन में डालने पर जल तल की बढ़ी ऊँचाई $(h) = 8\frac{9}{14}$ सेमी

अतः ऊपर उठे जल का आयतन = घन का आयतन

$$\pi r^2 h = x^3$$

या $$\frac{22}{7} \times (7)^2 \times 8\frac{9}{14} = x^3$$

या $$x^3 = \frac{22}{7} \times 49 \times \frac{121}{14}$$

या $$x^3 = 11 \times 121$$

या $$x^3 = 11 \times 11 \times 11$$

या $$x^3 = 11^3$$

या $$x = \sqrt[3]{11^3} = \mathbf{11} \text{ सेमी}$$ उत्तर

बहुविकल्पीय प्रश्न

नोट– बहुविकल्पीय प्रश्नों के उत्तर जानने के लिए पाठ्य-पुस्तक के पृष्ठ संख्या 324 का अवलोकन कीजिए।

16

लम्बवृत्तीय शंकु
(Right Circular Cone)

अभ्यास 16.1

1. उस लम्बवृत्तीय शंकु का आयतन ज्ञात कीजिए, जिसकी

(i) त्रिज्या 6 सेमी और ऊँचाई 7 सेमी है। (ii) त्रिज्या 3.5 सेमी और ऊँचाई 12 सेमी है।

हल– **(i)** दिया है—लम्बवृत्तीय शंकु की त्रिज्या $(r) = 6$ सेमी

तथा ऊँचाई $(h) = 7$ सेमी

अतः शंकु का आयतन $= \frac{1}{2}\pi r^2 h$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times (6)^2 \times 7 = \frac{1 \times 22 \times 36 \times 7}{3 \times 7}$$

$= 22 \times 12 =$ **264 सेमी^{3}** **उत्तर**

(ii) दिया है—लम्बवृत्तीय शंकु की त्रिज्या $(r) = 3.5$ सेमी

तथा ऊँचाई $(h) = 12$ सेमी

अतः शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times (3.5)^2 \times 12$$

$$= \frac{22 \times 3.5 \times 3.5 \times 12}{3 \times 7}$$

$= 22 \times 0.5 \times 3.5 \times 4 =$ **154 सेमी^{3}** **उत्तर**

2. शंकु के आकार के उस बर्तन की लीटरों में धारिता ज्ञात कीजिए जिसकी—

(i) त्रिज्या 7 सेमी और तिर्यक ऊँचाई 25 सेमी है। (ii) ऊँचाई 12 सेमी और तिर्यक ऊँचाई 13 सेमी है।

हल– **(i)** दिया है—शंकु के आधार की त्रिज्या $(r) = 7$ सेमी

तथा तिर्यक ऊँचाई $(l) = 25$ सेमी

$\therefore$ सूत्र— $l^2 = h^2 + r^2$ से,

$25^2 = h^2 + 7^2$ या $625 = h^2 + 49$

या $h^2 = 625 - 49 = 576$

या $h = \sqrt{576} = 24$ सेमी

शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times (7)^2 \times 24$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 24$$

$$= 22 \times 7 \times 8 = 1232 \text{ सेमी}^3$$

$$= \frac{1232}{1000} \text{ लीटर} = \mathbf{1.232} \textbf{ लीटर} \qquad \text{उत्तर}$$

(ii) दिया है—शंकु की ऊँचाई $(h) = 12$ सेमी

तथा तिर्यक ऊँचाई $(l) = 13$ सेमी

$\therefore$ सूत्र— $l^2 = h^2 + r^2$ से,

$$\text{शंकु की त्रिज्या } r = \sqrt{l^2 - h^2} = \sqrt{13^2 - 12^2}$$

या $r = \sqrt{169 - 144} = \sqrt{25}$

या $r = 5$ सेमी

$$\text{शंक्वाकार बर्तन का आयतन} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times (5)^2 \times 12$$

$$= \frac{22 \times 5 \times 5 \times 12}{3 \times 7} = \frac{2200}{7} \text{ सेमी}^3$$

$$= \frac{2200}{7 \times 1000} \text{ लीटर} = \frac{\mathbf{11}}{\mathbf{35}} \textbf{ लीटर} \qquad \text{उत्तर}$$

3. एक शंकु की ऊँचाई 15 सेमी है। यदि इसका आयतन 1570 सेमी^{3} है, तो इसके आधार की त्रिज्या ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ प्रयोग कीजिए।)

हल– दिया है—शंकु की ऊँचाई $(h) = 15$ सेमी

तथा शंकु का आयतन $= 1570$ सेमी^{3}

माना शंकु के आधार की त्रिज्या $= r$ सेमी

$\therefore$ शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h = 1570$

या $\frac{1}{3} \times 3.14 \times r^2 \times 15 = 1570$

या $r^2 = \frac{1570 \times 3}{3.14 \times 15} = \frac{1570}{15.7}$

या $r^2 = 100 \Rightarrow r = \sqrt{100} = \mathbf{10}$ **सेमी** उत्तर

4. यदि 9 सेमी ऊँचाई वाले एक लम्बवृत्तीय शंकु का आयतन 48 π सेमी^{3} है, तो इसके आधार का व्यास ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—लम्बवृत्तीय शंकु की ऊँचाई $(h) = 9$ सेमी

तथा आयतन $= 48\pi$ सेमी^{3}

माना शंकु के आधार की त्रिज्या $= r$ सेमी

$\therefore$ सूत्र—शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$ से,

$$48\pi = \frac{1}{3}\pi r^2 \times 9$$

या $$48\pi = \pi r^2 \times 3$$

या $$r^2 = \frac{48\pi}{3\pi} \quad \text{या} \quad r^2 = 16$$

या $$r = \sqrt{16} = 4 \text{ सेमी}$$

शंकु के आधार का व्यास $= 2r = 2 \times 4 = 8$ सेमी **उत्तर**

5. ऊपरी व्यास 3.5 मीटर वाले शंकु के आकार का एक गड्ढा 12 मीटर गहरा है। इसकी धारिता किलोलीटर में कितनी है?

हल– दिया है—शंक्वाकार गड्ढे का ऊपरी व्यास $= 3.5$ मीटर

$\therefore$ त्रिज्या $(r) = \frac{3.5}{2}$ मीटर

गड्ढे की गहराई $(h) = 12$ मीटर

शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times \left(\frac{3.5}{2}\right)^2 \times 12$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times \frac{3.5 \times 3.5}{2 \times 2} \times 12$$

$$= 22 \times 3.5 \times 0.5 = 38.5 \text{ मीटर}^3$$

$= 38.5$ किलोलीटर **उत्तर**

6. एक लम्बवृत्तीय शंकु का आयतन 9856 सेमी^{3} है। यदि इसके आधार का व्यास 28 सेमी है, तो ज्ञात कीजिए–

(i) शंकु की ऊँचाई (ii) शंकु की तिर्यक ऊँचाई (iii) शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

हल– दिया है—लम्बवृत्तीय शंकु का आयतन $= 9856$

तथा आधार का व्यास $= 28$ सेमी

$\therefore$ आधार की त्रिज्या $(r) = \frac{28}{2} = 14$ सेमी

माना शंकु की ऊँचाई तथा तिर्यक ऊँचाई क्रमशः h व l हैं।

(i) सूत्र—शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$ से,

$$9856 = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} (14)^2 \times h$$

या $$9856 = \frac{22 \times 14 \times 14 \times h}{3 \times 7}$$

या $$9856 = \frac{22 \times 2 \times 14}{3} \times h$$

या $$h = \frac{9856 \times 3}{22 \times 2 \times 14}$$

या $$h = 48 \text{ सेमी}$$ **उत्तर**

(ii) सूत्र— $l = \sqrt{r^2 + h^2}$ से,

$$l=\sqrt{14^2+48^2}=\sqrt{196+2304}$$

$$=\sqrt{2500}=\mathbf{50}\ \textbf{सेमी}$$ उत्तर

(iii) शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $=\pi rl$

$$=\frac{22}{7}\times 14\times 50=22\times 2\times 50$$

$$=\mathbf{2200}\ \textbf{सेमी}^2$$ उत्तर

7. उस शंकु के वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसकी त्रिज्या 5 सेमी और ऊँचाई 12 सेमी है।

हल– दिया है—शंकु की त्रिज्या $(r)=5$ सेमी तथा ऊँचाई $(h)=12$ सेमी

$\therefore$ सूत्र— $l^2=r^2+h^2$ से,

$$l=\sqrt{r^2+h^2}=\sqrt{(5)^2+(12)^2}$$

$$=\sqrt{25+144}=\sqrt{169}=\mathbf{13}\ \textbf{सेमी}$$ उत्तर

शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $=\pi rl$

$$=\pi\times 5\times 13=\mathbf{65}\,\pi\ \textbf{सेमी}^2$$ उत्तर

8. एक लम्बवृत्तीय शंकु की आधार त्रिज्या तथा वक्र पृष्ठ क्रमशः 3 सेमी तथा 15 π सेमी^{2} है। शंकु की तिर्यक ऊंचाई ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—लम्बवृत्तीय शंकु की त्रिज्या $(r)=3$ सेमी

तथा वक्र पृष्ठ $=15\pi$ सेमी^{2}

$\therefore$ सूत्र—शंकु का वक्र पृष्ठ $=\pi rl$ से,

$$15\pi=\pi\times 3\times l$$

या $$l=\frac{15\pi}{3\pi}=\mathbf{5}\ \textbf{सेमी}$$ उत्तर

9. एक लम्बवृत्तीय शंकु की आधार त्रिज्या 3 सेमी तथा ऊर्ध्वाधर ऊँचाई 4 सेमी है। शंकु का वक्रपृष्ठ ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—शंकु की आधार त्रिज्या $(r)=3$ सेमी

तथा ऊर्ध्वाधर ऊँचाई $(h)=4$ सेमी

$\therefore$ सूत्र— $l=\sqrt{r^2+h^2}$ से,

$$=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5\ \text{सेमी}$$

शंकु का वक्र पृष्ठ $=\pi rl$

$$=\pi\times 3\times 5=\mathbf{15}\,\pi\ \textbf{सेमी}^2$$ उत्तर

10. एक लम्बवृत्तीय शंकु के आधार की परिधि 44 सेमी है। उसकी ऊर्ध्वाधर ऊँचाई 24 सेमी है। उसकी तिर्यक ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—लम्बवृत्तीय शंकु के आधार की परिधि $=2\pi r=44$ सेमी

या $$2\times\frac{22}{7}\times r=44$$

या $$r=\frac{44\times 7}{2\times 22}=7\ \text{सेमी}$$

तथा ऊँचाई $(h) = 24$ सेमी

$\therefore$ सूत्र— $l = \sqrt{r^2 + h^2}$ से,

$= \sqrt{7^2 + 24^2}$

$= \sqrt{49 + 576} = \sqrt{625} =$ **25 सेमी** उत्तर

11. एक शंकु के आधार का व्यास 10.5 सेमी है और इसकी तिर्यक ऊँचाई 10 सेमी है। इसका वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—शंकु के आधार का व्यास $= 10.5$ सेमी

$\therefore$ त्रिज्या $(r) = \dfrac{10.5}{2}$ सेमी

तिर्यक ऊँचाई $(l) = 10$ सेमी

शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi r l$

$= \dfrac{22}{7} \times \dfrac{10.5}{2} \times 10$

$= 11 \times 1.5 \times 10$

$=$ **165 सेमी^{2}** उत्तर

12. एक शंकु का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसकी तिर्यक ऊँचाई 21 मीटर है और आधार का व्यास 24 मीटर है।

हल– दिया है—शंकु की तिर्यक ऊँचाई $(l) = 21$ मीटर

तथा आधार का व्यास $= 24$ मीटर

$\therefore$ त्रिज्या $(r) = \dfrac{24}{2} = 12$ मीटर

शंकु का कुल पृष्ठ $= \pi r(r + l)$

$= \dfrac{22}{7} \times 12(12 + 21)$

$= \dfrac{22}{7} \times 12 \times 33$

$= \dfrac{8712}{7} =$ **1244.57 मीटर^2** उत्तर

13. एक शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल 308 सेमी^{2} है और इसकी तिर्यक ऊँचाई 14 सेमी है। ज्ञात कीजिए–

(i) आधार की त्रिज्या (ii) शंकु का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल

हल– दिया है—शंकु का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 308$ सेमी^{2}

तथा शंकु की तिर्यक ऊँचाई $(l) = 14$ सेमी

माना शंकु के आधार की त्रिज्या $= r$

(i) शंकु का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi r l$

या $308 = \dfrac{22}{7} \times r \times 14$

या $r = \dfrac{308 \times 7}{22 \times 14} =$ **7 सेमी** उत्तर

(ii) शंकु का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi r(r+l)$

$$= \frac{22}{7} \times 7(7+14)$$

$$= 22 \times 21 = \mathbf{462} \text{ सेमी}^2$$ उत्तर

14. शंकु के आकार का एक तम्बू 10 मीटर ऊँचा है और उसके आधार की त्रिज्या 24 मीटर है। ज्ञात कीजिए–

(i) तम्बू की तिर्यक ऊँचाई

(ii) तम्बू में लगे कैनवास (canvas) की लागत, यदि 1 मीटर^2 कैनवास की लागत ₹ 70 है।

हल– दिया है—शंक्वाकार तम्बू की ऊँचाई $(h) = 10$ मीटर

तथा आधार की त्रिज्या $(r) = 24$ मीटर

माना तम्बू की तिर्यक ऊँचाई $= l$

(i) सूत्र— $l = \sqrt{r^2 + h^2}$ से,

$$l = \sqrt{24^2 + 10^2}$$

$$= \sqrt{576+100} = \sqrt{676} = \mathbf{26} \text{ मीटर}$$ उत्तर

(ii) तम्बू में लगा कैनवास = तम्बू का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$= \pi rl$$

$$= \frac{22}{7} \times 24 \times 26 \text{ मीटर}^2$$

₹ 70 प्रति मीटर^2 की दर से तम्बू में लगे कैनवास की लागत

$$= \frac{22}{7} \times 24 \times 26 \times 70 = ₹\,\mathbf{137280}$$ उत्तर

15. 8 मीटर ऊँचाई और आधार की त्रिज्या 6 मीटर वाले एक शंकु के आकार का तम्बू बनाने में 3 मीटर चौड़े तिरपाल की कितनी लम्बाई लगेगी? यह मान कर चलिए कि इसकी सिलाई और कटाई में 20 सेमी तिरपाल अतिरिक्त लगेगा ($\pi = 3.14$ का प्रयोग कीजिए)

हल– दिया है—शंक्वाकार तम्बू की ऊँचाई $(h) = 8$ मीटर

तथा आधार की त्रिज्या $(r) = 6$ मीटर

$\therefore$ तिर्यक ऊँचाई $l = \sqrt{r^2 + h^2}$ सूत्र से,

$$l = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36+64}$$

$$= \sqrt{100} = 10 \text{ मीटर}$$

तम्बू बनाने में आवश्यक तिरपाल = तम्बू का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$= \pi rl$$

$$= 3.14 \times 6 \times 10 = 188.4 \text{ मीटर}$$

तिरपाल की चौड़ाई $= 3$ मीटर

माना तिरपाल की लम्बाई $= x$ मीटर

तिरपाल का क्षेत्रफल = तम्बू बनाने में आवश्यक तिरपाल

लं० × चौ० $= 188.4$

या $x \times 3 = 1884 \quad \Rightarrow x = \frac{1884}{3} = 62.8$

या $x = 62.8$ मीटर

कटाई व सिलाई में लगी अतिरिक्त तिरपाल की लम्बाई = 20 सेमी = 0.2 मीटर

अत: आवश्यक तिरपाल की लम्बाई = 62.8 + 0.2 = **63.0 मीटर** उत्तर

16. शंकु के आकार की एक गुंबज की तिर्यक ऊंचाई और आधार व्यास क्रमश 25 मीटर और 14 मीटर हैं। इसके वक्रपृष्ठ पर ₹ 210 प्रति 100 मीटर^2 की दर से सफेदी कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—शंक्वाकार गुंबज की तिर्यक ऊँचाई $(l) = 25$ मीटर

तथा आधार का व्यास = 14 मीटर

$\therefore$ आधार की त्रिज्या $= \frac{14}{2} = 7$ मीटर

गुंबज का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi r l$

$= \frac{22}{7} \times 7 \times 25 = 550$ मीटर^2

सफेदी की दर = ₹ 210 प्रति 100 मीटर^2

= ₹ $\frac{210}{100}$ प्रति मीटर^2 = ₹ 2.1 प्रति मीटर^2

$\therefore$ गुंबज पर सफेदी कराने का व्यय = ₹ 550 × 2.10 = ₹ **1155.00** उत्तर

17. उस बड़े-से-बड़े शंकु का आयतन ज्ञात कीजिए, जो एक 18 सेमी भुजा के घन से काटा जाता है।

हल– दिया है—घन की भुजा = 18 सेमी

अत: 18 सेमी भुजा वाले घन से काटे गए बड़े–से–बड़े शंकु की ऊँचाई $(h) = 18$ सेमी तथा आधार का व्यास = 18 सेमी होगा।

$\therefore$ काटे गए शंकु के आधार की त्रिज्या $= \frac{18}{2} = 9$ सेमी

अत: घन से काटे गए शंकु का आयतन $= \frac{1}{3} \pi r^2 h$

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times (9)^2 \times 18$

$= \frac{22 \times 81 \times 18}{21} =$ **1527.43 सेमी^{3}** उत्तर

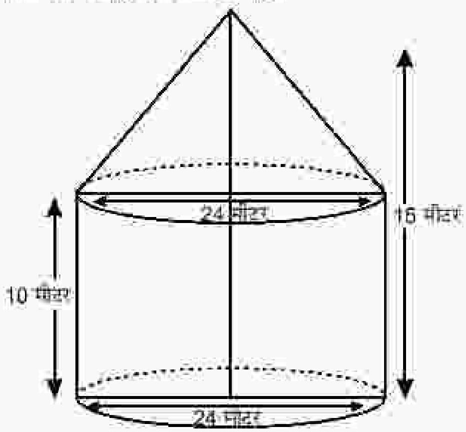
18. एक कैनवास के टेंट का शीर्ष ऊपर से शंक्वाकार तथा नीचे से लम्बवृत्तीय बेलन के रूप का है। यदि आधार का व्यास 24 मीटर तथा सम्पूर्ण ऊंचाई 15 मीटर है तो टेंट में कितने वर्ग मीटर कैनवास की आवश्यकता होगी, जबकि टेंट के बेलनाकार भाग की ऊंचाई 10 मीटर है?

हल– दिया है—चित्रानुसार, कैनवास के टेंट का ऊपरी भाग शंक्वाकार तथा नीचे का भाग बेलनाकार है।

बेलनाकार भाग के आधार का व्यास = 24 मीटर

$\therefore$ त्रिज्या $(r) = \frac{24}{2} = 12$ मीटर

टेंट के बेलनाकार भाग की ऊँचाई $(h) = 10$ मीटर



अतः टेंट के बेलनाकार भाग के लिए आवश्यक कैनवास = बेलनाकार भाग का वक्र पृष्ठ

$= 2\pi rh$

$= 2 \times \pi \times 12 \times 10 = 240\pi$ मीटर^2

टेंट की कुल ऊँचाई $= 15$ मीटर

$\therefore$ टेंट के शंक्वाकार भाग की ऊँचाई $(h_1) = 15 - 10 = 5$ मीटर

तथा शंक्वाकार भाग की त्रिज्या (r) = बेलनाकार भाग की त्रिज्या $= 12$ मीटर

तथा तिर्यक ऊँचाई $l = \sqrt{h_1^2 + r^2} = \sqrt{5^2 + 12^2}$

$= \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$ मीटर

अतः टेंट के शंक्वाकार भाग के लिए आवश्यक कुल कैनवास

= शंक्वाकार भाग का वक्र पृष्ठ

$= \pi rl$

$= \pi \times 12 \times 13 = 156\pi$ मीटर^2

अतः टेंट के लिए आवश्यक कुल कैनवास $= 240\pi + 156\pi$

$= 396\pi$ **मीटर^2** **उत्तर**

19. एक शंकु की त्रिज्या तथा ऊँचाई में 3 : 4 का अनुपात है। शंकु का आयतन 768 π सेमी^{3} है। शंकु की त्रिज्या, ऊँचाई तथा तिर्यक ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—शंकु की त्रिज्या तथा ऊँचाई में अनुपात $= 3 : 4$

माना शंकु की त्रिज्या $(r) = 3x$

तब शंकु की ऊँचाई $(h) = 4x$

तथा शंकु का आयतन $= 768\pi$

या $\frac{1}{3}\pi r^2 h = 768\pi$

या $\frac{1}{3} \times (3x)^2 \times 4x = 768$

या $\frac{1}{3}\times 9x^2\times 4x = 768$ या $12x^3 = 768$

या $x^3 = \frac{768}{12}$ या $x^3 = 64$

या $x = \sqrt[3]{64} = 4$ सेमी

अत: शंकु की त्रिज्या $(r) = 3x = 3\times 4 = $ **12 सेमी** उत्तर

ऊँचाई $(h) = 4x = 4\times 4 = $ **16 सेमी** उत्तर

तथा तिर्यक ऊँचाई $(l) = \sqrt{r^2 + h^2}$

या $l = \sqrt{12^2 + 16^2}$

या $l = \sqrt{144 + 256} = \sqrt{400}$

या $l = $ **20 सेमी** उत्तर

20. दो शंकुओं के व्यास समान हैं। यदि उनकी तिरछी ऊँचाइयाँ 5 : 4 के अनुपात में हों, तो उनके वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—दो शंकुओं के व्यास समान हैं।

अत: उनकी त्रिज्याएँ भी समान होंगी।

माना दोनों शंकुओं की त्रिज्या $= r$

शंकुओं की तिरछी ऊँचाइयों में अनुपात $= 5:4$

माना पहले शंकु की तिरछी ऊँचाई $(l_1) = 5x$

तब दूसरे शंकु की तिरछी ऊँचाई $(l_2) = 4x$

पहले शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi r l_1$

या $S_1 = \pi r\times 5x = 5\pi rx$

तथा दूसरे शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi r l_2$

या $S_2 = \pi r\times 4x = 4\pi rx$

$\therefore$ $\frac{S_1}{S_2} = \frac{5\pi rx}{4\pi rx}$

या $\frac{S_1}{S_2} = \frac{5}{4} \Rightarrow S_1 : S_2 = \mathbf{5:4}$ उत्तर

21. एक जोकर की टोपी एक शंकु के आकार की है, जिसके आधार की त्रिज्या 7 सेमी और ऊंचाई 24 सेमी है। इसी प्रकार की 10 टोपियाँ बनाने के लिए आवश्यक गत्ते का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—शंक्वाकार टोपी की त्रिज्या $(r) = 7$ सेमी

तथा ऊंचाई $(h) = 24$ सेमी

$\therefore$ टोपी की तिर्यक ऊंचाई $l = \sqrt{r^2 + h^2}$ सूत्र से,

या $l = \sqrt{7^2 + 24^2} = \sqrt{49 + 576}$

$= \sqrt{625} = 25$ सेमी

1 टोपी बनाने के लिए आवश्यक गत्ता = टोपी का वक्र पृष्ठ

$= \pi r l$

$$= \frac{22}{7} \times 7 \times 25 = 550 \text{ सेमी}^2$$

$\therefore$ 10 टोपियों के लिए आवश्यक गत्ता $= 10 \times 550 = 5500$ सेमी^{2} उत्तर

22. किसी बस स्टाप को पुराने गत्ते से बने 50 खोखले शंकुओं द्वारा सड़क से अलग किया हुआ है। प्रत्येक शंकु के आधार का व्यास 40 सेमी है और ऊँचाई 1 मीटर है। यदि इन शंकुओं की बाहरी पृष्ठों को पेंट करवाना है और पेंट की दर ₹ 12 प्रति मीटर^2 है, तो इनको पेंट कराने में कितनी लागत आएगी? ($\pi = 3.14$ और $\sqrt{1.04} = 1.02$ का प्रयोग कीजिए।

हल– दिया है—खोखले शंकुओं का व्यास $= 40$ सेमी $= 0.4$ मीटर

$\therefore$ त्रिज्या $(r) = \frac{0.4}{2} = 0.2$ मीटर तथा ऊँचाई $(h) = 1$ मीटर

$$\text{शंकु की तिर्यक ऊँचाई } l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{(0.2)^2 + 1^2}$$

$$= \sqrt{0.04 + 1} = \sqrt{1.04}$$

$$= 1.02 \text{ मीटर}$$

$\therefore$ 1 शंकु का वक्र पृष्ठ $= \pi r l$

$$= 3.14 \times 0.2 \times 1.02$$

$$= \mathbf{0.648 \text{ मीटर}^2}$$ उत्तर

$\therefore$ 50 शंकुओं का वक्र पृष्ठ $= 50 \times 0.640 = 32.03$ मीटर^2

₹ 12 प्रति मीटर की दर से शंकुओं को पेंट कराने में लागत $= 12 \times 32.03$

$= ₹ 384.36$ उत्तर

23. एक शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल 4070 सेमी^{2} है और उसका व्यास 70 सेमी है। इसकी तिरछी ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है— शंकु का व्यास $= 70$ सेमी

$\therefore$ त्रिज्या $(r) = \frac{70}{2} = 35$ सेमी

माना शंकु की तिर्यक ऊँचाई $= l$

शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4070$ सेमी^{2}

या $\pi r l = 4070$

या $\frac{22}{7} \times 35 \times l = 4070$

या $22 \times 5 \times l = 4070$

या $l = \frac{4070}{22 \times 5} = 37$ सेमी उत्तर

24. एक शंकु का ऊपरी भाग आधार के समांतर समतल द्वारा काटकर निकाला गया है। यदि शेष भाग का वक्रपृष्ठ पूरे शंकु का $\frac{8}{9}$ हो, तो काटने वाला समतल उस शंकु के आधार से कितना ऊपर है?

हल– माना OAB एक शंकु है जिसकी ऊँचाई H तथा त्रिज्या R है।

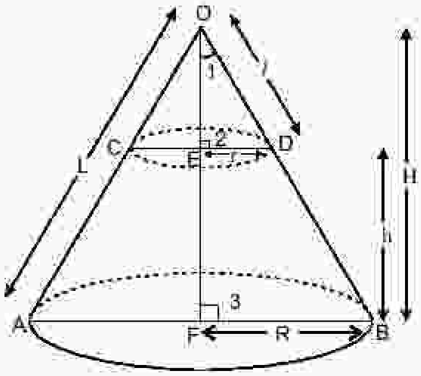
शंकु को एक समतल $CD \parallel AB$ द्वारा काटकर OCD निकाला गया है।

माना $\quad EF = h, OF = H, OD = l,$

$\qquad OA = OB = L, ED = r, FB = R$

ΔEOD और ΔFOB में,

$$\angle 1 = \angle 1 \text{ (उभयनिष्ठ)}$$
$$\angle 2 = \angle 3 \text{ (प्रत्येक } 90^\circ)$$



$\therefore \Delta EOD \sim \Delta FOB$

अतः $$\frac{OE}{OF} = \frac{OD}{OB} = \frac{ED}{FB}$$

या $$\frac{OF - EF}{OF} = \frac{OD}{OB} = \frac{ED}{FB}$$

या $$\frac{H - h}{H} = \frac{l}{L} = \frac{r}{R} \qquad \ldots(1)$$

अब शेष भाग $CABD$ का वक्रपृष्ठ $= \frac{8}{9} \times$ शंकु OAB का वक्रपृष्ठ

$\therefore$ शंकु OCD का वक्रपृष्ठ $= \left(1 - \frac{8}{9}\right)$ शंकु OAB का वक्रपृष्ठ

$$\pi r l = \frac{1}{9} \pi R L$$

या $$\frac{r}{R} \times \frac{l}{L} = \frac{1}{9}$$

या $$\frac{(H - h)}{H} \times \frac{(H - h)}{H} = \frac{1}{9}$$

या $$\left(\frac{H - h}{H}\right)^2 = \frac{1}{9} \qquad \text{या} \qquad \frac{H - h}{H} = \sqrt{\frac{1}{9}}$$

या $$\frac{H - h}{H} = \frac{1}{3} \qquad \text{या} \qquad 3(H - h) = H$$

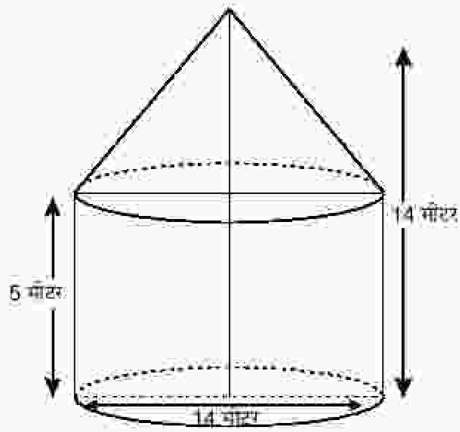
या $$3H - 3h = H \qquad \text{या} \qquad 3H - H = 3h$$

या $$2H = 3h \quad \text{या} \quad h = \frac{2}{3}H$$

अतः काटने वाला समतल शंकु के आधार से उसकी ऊँचाई के $\frac{2}{3}$ **भाग के** ऊपर है। **उत्तर**

25. एक तम्बू के नीचे का भाग लम्बवृत्तीय बेलनाकार और ऊपरी भाग शंक्वाकार है। यदि तम्बू के आधार का व्यास 14 मीटर, बेलनाकार भाग की ऊंचाई 5 मीटर तथा तम्बू की सम्पूर्ण ऊंचाई 14 मीटर है तो तम्बू का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल– चित्रानुसार, एक तम्बू जिसका नीचे का भाग बेलनाकार है।



तम्बू के आधार का व्यास = 14 मीटर

$\therefore$ $$\text{त्रिज्या } (r) = \frac{14}{2} = 7 \text{ मीटर}$$

बेलनाकार भाग की ऊँचाई $(h) = 5$ मीटर

$\therefore$ तम्बू के बेलनाकार भाग का आयतन $= \pi r^2 h = \frac{22}{7} \times (7)^2 \times 5$

$$= \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 5 = 770 \text{ मीटर}^3$$

टेंट की कुल ऊँचाई = 14 मीटर

$\therefore$ टेंट के शंक्वाकार भाग की ऊँचाई $= 14 - 5 = 9$ मीटर $= (h_1)$

तथा शंक्वाकार भाग की त्रिज्या (r) = आधार की त्रिज्या = 7 मीटर

अतः शंक्वाकार भाग का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times (7)^2 \times 9$$

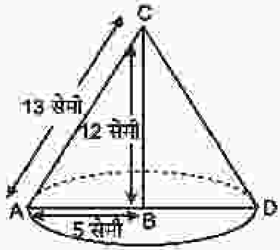
$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 9 = 22 \times 7 \times 3 = 462 \text{ मीटर}^3$$

टेंट का कुल आयतन = बेलनाकार भाग का आयतन + शंक्वाकार भाग का आयतन

$$= 770 + 462 = \mathbf{1232} \textbf{ मीटर}^3$$ **उत्तर**

26. भुजाओं 5 सेमी, 12 सेमी और 13 सेमी वाले एक समकोण त्रिभुज ABC को भुजा 12 सेमी के परितः घुमाया जाता है। इस प्रकार प्राप्त ठोस का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—एक समकोण ΔABC, जिसकी भुजाएँ $AB = 5$ सेमी, $BC = 12$ सेमी तथा $CA = 13$ सेमी है। त्रिभुज को भुजा BC के परितः घुमाया जाता है। जिससे एक शंक्वाकार आकृति ACD प्राप्त होती है।



जिसकी त्रिज्या $(r) = AB = 5$ सेमी

तथा ऊँचाई $(h) = BC = 12$ सेमी

अतः शंकु ACD का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$$= \frac{1}{3} \times \pi \times (5)^2 \times 12$$

$$= \pi \times 25 \times 4$$

$$= 100\,\pi \text{ सेमी}^3$$ उत्तर

27. यदि प्रश्न 26 के त्रिभुज ABC को यदि भुजा 5 सेमी के परितः घुमाया जाए, तो इस प्रकार प्राप्त ठोस का आयतन ज्ञात कीजिए। प्रश्न 26 और 27 में प्राप्त किए गए दोनों ठोसों के आयतनों का अनुपात भी ज्ञात कीजिए।

हल– प्रश्न 26 में दिए गए त्रिभुज ABC को भुजा 5 सेमी के परितः घुमाने से प्राप्त शंक्वाकार ठोस की त्रिज्या $(r) = 12$ सेमी तथा ऊँचाई $(h) = 5$ सेमी होगी।

अतः प्राप्त शंक्वाकार ठोस का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi (12)^2 \times 5$

$$= 240\pi \text{ सेमी}^3$$ उत्तर

$$\frac{\text{प्रश्न 26 में प्राप्त ठोस का आयतन}}{\text{प्रश्न 27 में प्राप्त ठोस का आयतन}} = \frac{100\pi}{240\pi}$$

$$= \frac{5}{12} \Rightarrow 5 : 12$$ उत्तर

28. गेहूँ की एक ढेरी 10.5 मीटर व्यास और ऊंचाई 3 मीटर वाले एक शंकु के आकार की है। इसका आयतन ज्ञात कीजिए। इस ढेरी को वर्षा से बचाने के लिए कैनवास से ढका जाता है। वाँछित कैनवास का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—गेहूँ की शंक्वाकार ढेरी का व्यास $= 10.5$ मीटर

$\therefore$ त्रिज्या $(r) = \frac{10.5}{2}$ मीटर

तथा ऊँचाई $(h) = 3$ मीटर

$\therefore$ तिरछी (तिर्यक) ऊँचाई $l = \sqrt{r^2 + h^2}$ सूत्र से,

$$= \sqrt{\left(\frac{10.5}{2}\right)^2 + (3)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{110.25}{4} + 9} = \sqrt{\frac{110.25 + 36}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{146.25}{4}} = \frac{12.09}{2} = 6.046 \text{ मीटर}$$

अतः शंक्वाकार गेहूँ की ढेरी का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times \left(\frac{10.5}{2}\right)^2 \times 3$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{10.5}{2} \times \frac{10.5}{2} = \frac{22 \times 10.5 \times 15}{4}$$

$= 86.625$ मीटर^3 **उत्तर**

शंक्वाकार गेहूँ की ढेरी को ढकने के लिए आवश्यक तिरपाल

= गेहूँ की ढेरी का वक्र पृष्ठ

$= \pi r l$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{10.5}{2} \times 6.046 = 11 \times 1.5 \times 6.046$$

$= 99.76$ मीटर^2 **उत्तर**

29. एक शंक्वाकार डेरे में 6 व्यक्तियों को ठहराना है। प्रत्येक व्यक्ति को जमीन पर 15 वर्ग मीटर स्थान तथा 150 घन मीटर वायु साँस लेने के लिए चाहिए। डेरे की ऊंचाई ज्ञात कीजिए।

हल– माना शंक्वाकार डेरे के आधार की त्रिज्या $= r$

तथा ऊँचाई $= h$

1 व्यक्ति के लिए आवश्यक स्थान $= 15$ वर्ग मीटर

तथा 1 व्यक्ति के लिए आवश्यक वायु $= 150$ घन मीटर

डेरे के आधार का क्षेत्रफल = 6 व्यक्तियों के लिए आवश्यक स्थान

या $\pi r^2 = 6 \times 15$ ...(1)

शंक्वाकार डेरे का आयतन = 6 व्यक्तियों के लिए आवश्यक वायु

$$\frac{1}{3}\pi r^2 h = 6 \times 150$$

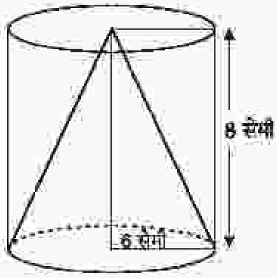
या $\frac{1}{3} \times 6 \times 15 \times h = 6 \times 150$ (समीकरण (1) से)

या $h = \frac{6 \times 150 \times 3}{6 \times 15} =$ **30 मीटर** **उत्तर**

30. एक शंकु का वक्रपृष्ठ $188\frac{4}{7}$ वर्ग मीटर तथा उसके आधार का व्यास 12 मीटर है। शंकु की ऊंचाई ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है— शंकु का वक्रपृष्ठ $= 188\frac{4}{7}$ वर्ग मीटर

$= \frac{1320}{7}$ वर्ग मीटर



शंकु के आधार का व्यास $= 12$ मीटर

$\therefore$ त्रिज्या $= \frac{12}{2} = 6$ मीटर

माना शंकु की ऊँचाई $= h$

तथा तिर्यक ऊँचाई $= l$

सूत्र—शंकु का वक्रपृष्ठ $= \pi r l$ से,

$$\frac{1320}{7} = \frac{22}{7} \times 6 \times l$$

या $$l = \frac{1320 \times 7}{7 \times 22 \times 6} = 10 \text{ मीटर}$$

अब, सूत्र—$h = \sqrt{l^2 - r^2}$ से,

$$h = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{100 - 36}$$

$$= \sqrt{64} = 8 \text{ मीटर}$$ उत्तर

31. यदि 8 सेमी ऊंचाई और 6 सेमी त्रिज्या के ठोस बेलन से इसी ऊंचाई तथा इसी त्रिज्या का एक ऊर्ध्वाधर शंकु काट दिया गया है, तो अवशेष ठोस का सम्पूर्ण पृष्ठ ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—ठोस बेलन की ऊँचाई $(h) = 8$ सेमी

तथा आधार की त्रिज्या $(r) = 6$ सेमी

ठोस बेलन का वक्रपृष्ठ $= 2\pi r h$

$= 2\pi \times 6 \times 8$

$= 96\pi$ सेमी^{2}

ठोस बेलन के ऊपरी सिरे का क्षेत्रफल $= \pi r^2 = \pi \times 6^2$

$= 36\pi$ सेमी^{2}

ठोस बेलन से काटे गए शंकु की त्रिज्या $r =$ बेलन की त्रिज्या

$= 6$ सेमी

तथा ऊँचाई $(h) =$ बेलन की ऊँचाई $= 8$ सेमी

$\therefore$ शंकु की तिर्यक ऊंचाई $(l) = \sqrt{h^2 + r^2}$ सूत्र से,

$= \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36}$

$= \sqrt{100} = 10$ सेमी

अतः काटे गए शंकु का वक्र पृष्ठ $= \pi r l$

$= \pi \times 6 \times 10 = 60\pi$ सेमी^{2}

अत: ठोस बेलन से शंकु काटने के बाद बचे अवशेष ठोस का सम्पूर्ण पृष्ठ

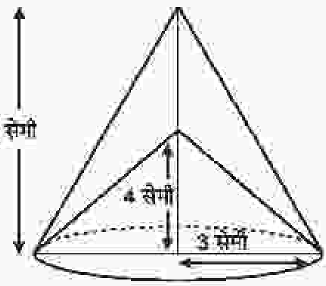
= बेलन का वक्र पृष्ठ + सिरे का वक्र पृष्ठ + शंकु का वक्र पृष्ठ

$= 96\pi + 36\pi + 60\pi = 192\pi$ सेमी^{2} उत्तर

32. किसी शंकु की ऊंचाई तथा त्रिज्या क्रमश: 8 सेमी और 3 सेमी हैं। उसमें से 4 सेमी गहरा और 3 सेमी त्रिज्या का एक शंकु काटकर निकाल दिया गया है। शेष आकृति का सम्पूर्ण पृष्ठ ज्ञात कीजिए।

हल- दिया है—दिए गए शंकु की त्रिज्या $(r) = 3$ सेमी

तथा ऊँचाई $(h) = 8$ सेमी



∴ दिए गए शंकु की तिर्यक ऊँचाई

$l = \sqrt{r^2 + h^2}$ सूत्र से

$l = \sqrt{3^2 + 8^2}$

$= \sqrt{9 + 64} = \sqrt{73}$

∴ दिए गए शंकु का वक्र पृष्ठ $= \pi rl$

$= \pi \times 3\sqrt{73}$ सेमी^{2}

दिए गए शंकु से काटे गए शंकु की त्रिज्या $(r) = 3$ सेमी तथा ऊँचाई $(h) = 4$ सेमी

∴ तिर्यक ऊँचाई $l = \sqrt{r^2 + h^2}$

$= \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$ सेमी

अत: काटे गए शंकु का वक्र पृष्ठ $= \pi rl$

$= \pi \times 3 \times 5 = 15\pi$ सेमी^{2}

अत: अवशेष आकृति का सम्पूर्ण पृष्ठ = दिए गए शंकु का वक्र पृष्ठ + काटे गए शंकु का वक्र पृष्ठ

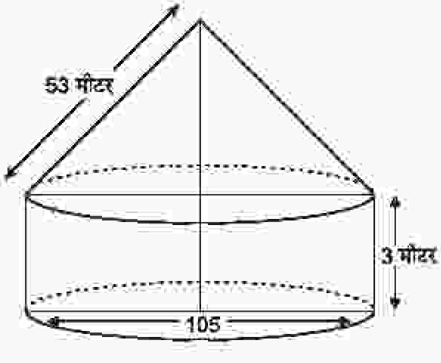
$= 3\pi\sqrt{73} + 15\pi = 15\pi + 3\pi\sqrt{73}$

$= 3\pi(5 + \sqrt{73})$ सेमी^{2} उत्तर

33. एक सरकस का टेंट 3 मीटर ऊंचाई तक बेलनाकार है, ऊपर से शंक्वाकार है। व्यास 105 मीटर तथा शंक्वाकार भाग की ऊंचाई 53 मीटर है। टेंट बनाने के लिए आवश्यक कैनवास का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल- दिया है—सरकस के टेंट के बेलनाकार भाग की ऊँचाई $(h) = 3$ मीटर

तथा आधार का व्यास = 105 मीटर



$\therefore$ त्रिज्या $(r) = \dfrac{105}{2}$ मीटर

टेंट के बेलनाकार भाग का वक्रपृष्ठ $= 2\pi rh$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{105}{2} \times 3$$

$$= 22 \times 15 \times 3 = 990 \text{ मीटर}^2$$

टेंट के शंक्वाकार भाग की त्रिज्या (r) = बेलनाकार भाग की त्रिज्या

या $r = \dfrac{105}{2}$ मीटर

तथा तिरछी ऊँचाई $(l) = 53$ मीटर

अतः शंक्वाकार भाग का वक्रपृष्ठ $= \pi rl$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{105}{2} \times 53 = 11 \times 15 \times 53$$

$$= 8745 \text{ मीटर}^2$$

टेंट का सम्पूर्ण वक्र पृष्ठ = बेलनाकार भाग का वक्र पृष्ठ + शंक्वाकार भाग का वक्र पृष्ठ

$= 990 + 8745 = \mathbf{9735}$ **मीटर**^{2} उत्तर

बहुविकल्पीय प्रश्न

नोट—बहुविकल्पीय प्रश्नों के उत्तर जानने के लिए पाठ्य-पुस्तक के पृष्ठ संख्या 335 का अवलोकन कीजिए।

17

गोला
(Sphere)

1. उस गोले का आयतन ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या निम्न है—

(i) 7 सेमी (ii) 0.63 मीटर

हल– (i) दिया है—गोले की त्रिज्या $(r) = 7$ सेमी

अतः गोले का आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times (7)^3 = \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 7$

$= \frac{4312}{3} = \mathbf{1437\frac{1}{3}}$ **सेमी**^{3} **उत्तर**

(ii) दिया है— गोले की त्रिज्या $(r) = 0.63$ मीटर

अतः गोले का आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times (0.63)^3$

$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 0.63 \times 0.63 \times 0.63$

$= 4 \times 22 \times 0.09 \times 0.21 \times 0.63$

$= \mathbf{1.05}$ **सेमी**^{3} **उत्तर**

2. उस ठोस गोलाकार गेंद द्वारा हटाए गए (विस्थापित) पानी का आयतन ज्ञात कीजिए, जिसका व्यास निम्न है—

(i) 28 सेमी (ii) 0.21 मीटर

हल– (i) दिया है— गोलाकार गेंद का व्यास $= 28$ सेमी

$\therefore$ त्रिज्या $(r) = \frac{28}{2} = 14$ सेमी

अतः गेंद द्वारा हटाये गये पानी का आयतन = गेंद का आयतन

$= \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times (14)^3$

$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 14 \times 14 \times 14 = \frac{34496}{3}$

$= \mathbf{11498\frac{2}{3}}$ **सेमी**^{3} **उत्तर**

(ii) दिया है—गोलाकार गेंद का व्यास $= 0.21$ मीटर

$\therefore$ त्रिज्या $(r) = \frac{0.21}{2}$ मीटर

$\therefore$ गेंद द्वारा विस्थापित पानी = गेंद का आयतन

$$= \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times \left(\frac{0.21}{2}\right)^3$$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times \frac{0.21 \times 0.21 \times 0.21}{2 \times 2 \times 2}$$

$$= 11 \times 0.01 \times 0.21 \times 0.21$$

$$= \mathbf{0.004851} \text{ मीटर}^3$$ **उत्तर**

3. धातु की एक गेंद का व्यास 4.2 सेमी है। यदि इस धातु का घनत्व 8.9 ग्राम प्रति सेमी^{3} है, तो इस गेंद का द्रव्यमान ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—धातु की गेंद का व्यास = 4.2 सेमी

$\therefore$ त्रिज्या $= \frac{4.2}{2} = 2.1$ सेमी

$\therefore$ गेंद का आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \times \frac{22}{7}(2.1)^3$

$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 2.1 \times 2.1 \times 2.1$

$= 4 \times 22 \times 0.1 \times 2.1 \times 2.1 = 38.808$ सेमी^{3}

धातु का घनत्व = 8.9 ग्राम प्रति सेमी^{3}

$\therefore$ गेंद का द्रव्यमान = गेंद का आयतन × धातु का घनत्व

$= 38.808 \times 8.9 =$ **345.39 ग्राम** **उत्तर**

4. चन्द्रमा का व्यास पृथ्वी के व्यास का लगभग एक चौथाई है। चन्द्रमा का आयतन पृथ्वी के आयतन की कौन-सी भिन्न है?

हल– माना पृथ्वी का व्यास $= d$

$\therefore$ पृथ्वी की त्रिज्या $(R) = \frac{d}{2}$

प्रश्नानुसार, चन्द्रमा का व्यास $= \frac{1}{4}$ पृथ्वी का व्यास $= \frac{1}{4}d$

$\therefore$ चन्द्रमा की त्रिज्या $(R') = \dfrac{\frac{1}{4} \times d}{2} = \frac{d}{8}$

पृथ्वी का आयतन $(V) = \frac{4}{3}\pi R^3$

या $V = \frac{4}{3}\pi \times \left(\frac{d}{2}\right)^3$ या $V = \frac{4}{3}\pi \times \frac{d^3}{8}$

या $V = \frac{\pi}{6}d^3$

तथा चन्द्रमा का आयतन $(V') = \frac{4}{3}\pi R'^3$

या $V' = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{8}\right)^3$ या $V' = \frac{4}{3}\pi \times \frac{d^3}{512}$

या $$V' = \frac{1}{64} \times \frac{\pi}{6} d^3 \quad \text{या} \quad V' = \frac{1}{64} V$$

अतः चन्द्रमा का आयतन पृथ्वी के आयतन का $\frac{1}{64}$ वी भिन्न है। **उत्तर**

5. दो गोलों की त्रिज्याओं में 1 : 3 का अनुपात है। उनके वक्रपृष्ठों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल– माना दो गोलों की त्रिज्याएँ r_1 व r_2 हैं।

प्रश्नानुसार, $$r_1 : r_2 = 1 : 3$$

या $$\frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{3}$$

प्रथम गोले का वक्रपृष्ठ $(S_1) = 4\pi r_1^2$

द्वितीय गोले का वक्रपृष्ठ $(S_2) = 4\pi r_2^2$

$\therefore$ $$\frac{S_1}{S_2} = \frac{4\pi r_1^2}{4\pi r_2^2} \quad \text{या} \quad \frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$$

या $$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \quad \text{या} \quad \frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{9}$$

या $$S_1 : S_2 = \mathbf{1 : 9}$$ **उत्तर**

6. यदि एक गोले का वक्र पृष्ठ 264 सेमी^{2} हो तब इसके अर्द्धगोले का सम्पूर्ण पृष्ठ ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—गोले का वक्रपृष्ठ $= 4\pi r^2 = 264$ सेमी^{2}

या $$4 \times \frac{22}{7} r^2 = 264 \quad \text{या} \quad r^2 = \frac{264 \times 7}{22 \times 4}$$

या $$r^2 = 21$$

अतः अर्द्ध गोले का सम्पूर्ण पृष्ठ $= 3\pi r^2$

$$= 3 \times \frac{22}{7} \times 21 = \mathbf{198 \text{ सेमी}^2}$$ **उत्तर**

7. दो गोलों की त्रिज्याओं का अनुपात 3 : 4 है। गोलों के वक्रपृष्ठों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल– माना दो गोलों की त्रिज्या क्रमशः r_1 व r_2 हैं।

प्रश्नानुसार, $$r_1 : r_2 = 3 : 4 \quad \text{या} \quad \frac{r_1}{r_2} = \frac{3}{4}$$

प्रथम गोले का वक्रपृष्ठ $= 4\pi r_1^2 = S_1$ (माना)

तथा द्वितीय गोले का वक्रपृष्ठ $= 4\pi r_2^2 = S_2$ (माना)

अतः $$\frac{S_1}{S_2} = \frac{4\pi r_1^2}{4\pi r_2^2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

अतः $$\mathbf{S_1 : S_2 = 9 : 16}$$ **उत्तर**

8. धातु के 5 सेमी त्रिज्या के एक ठोस गोले को पिघलाकर 1 सेमी त्रिज्या की कितनी गोलियाँ बनाई जा सकती है?

हल– दिया है—धातु के ठोस गोले की त्रिज्या $(R) = 5$ सेमी

अतः ठोस गोले का आयतन $= \frac{4}{3}\pi R^3$

$$= \frac{4}{3}\pi \times (5)^3 = \frac{4}{3}\pi \times 125 \text{ सेमी}^3$$

ठोस गोले को पिघलाकर बनाई गई गोलियों की त्रिज्या $(r) = 1$ सेमी

अतः प्रत्येक गोली का आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$$= \frac{4}{3}\pi \times 1^3 = \frac{4}{3}\pi \text{ सेमी}^3$$

अतः गोलियों की संख्या $= \dfrac{\text{ठोस गोले का आयतन}}{\text{1 गोली का आयतन}}$

$$= \frac{\frac{4}{3}\pi \times 125}{\frac{4}{3}\pi} = \mathbf{125}$$ उत्तर

9. उस गोले की त्रिज्या ज्ञात कीजिए, जिसके आयतन और वक्रपृष्ठ के संख्यात्मक मान बराबर हैं।

हल– माना गोले की त्रिज्या $= r$

प्रश्नानुसार, गोले का आयतन = गोले का वक्रपृष्ठ

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 4\pi r^2 \quad \text{या} \quad \frac{r}{3} = 1$$

या $r = 3$ **मात्रक** उत्तर

10. एक अर्द्ध गोले की त्रिज्या 6 सेमी है। अर्द्ध गोले का सम्पूर्ण पृष्ठ तथा आयतन ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—अर्द्ध गोले की त्रिज्या $(r) = 6$ सेमी

अतः अर्द्ध गोले का सम्पूर्ण पृष्ठ $= 3\pi r^2$

$$= 3\pi \times 6^2 = 108\pi \text{ सेमी}^2$$

तथा अर्द्ध गोले का आयतन $= \frac{2}{3}\pi r^3$

$$= \frac{2}{3}\pi(6)^3 = \frac{2}{3}\pi \times 216$$

$$= \mathbf{144\pi \text{ सेमी}^3}$$ उत्तर

11. निम्न त्रिज्या वाले गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए—

(i) 10.5 सेमी (ii) 5.6 सेमी (iii) 14 सेमी

हल– (i) दिया है—गोले की त्रिज्या $(r) = 10.5$ सेमी

अतः गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4\pi r^2$

$$= 4\pi(10.5)^2 = 4 \times \frac{22}{7} \times 110.25$$

$$= 88 \times 15.75 = \mathbf{1386}\text{ **सेमी**}^2$$ उत्तर

(ii) दिया है— गोले की त्रिज्या $(r) = 5.6$ सेमी

अतः गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4\pi r^2$

$$= 4 \times \frac{22}{7} \times (5.6)^2 = \frac{88}{7} \times 31.36$$

$$= 88 \times 4.48 = \mathbf{394.24}\text{ **सेमी**}^2$$ उत्तर

(iii) दिया है—गोले की त्रिज्या $(r) = 14$ सेमी

अतः गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4\pi r^2$

$$= 4 \times \frac{22}{7}(14)^2 = 4 \times \frac{22}{7} \times 14 \times 14$$

$$= 4 \times 22 \times 2 \times 14 = \mathbf{2464}\text{ **सेमी**}^2$$ उत्तर

12. निम्न व्यास वाले गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए—

(i) 14 सेमी (ii) 21 सेमी (iii) 3.5 मीटर

हल– (i) दिया है—गोले का व्यास $= 14$ सेमी

$\therefore$ त्रिज्या $(r) = \frac{14}{2} = 7$ सेमी

अतः गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4\pi r^2$

$$= 4 \times \frac{22}{7} \times (7)^2 = \frac{4 \times 22}{7} \times 7 \times 7$$

$$= 88 \times 7 = \mathbf{616}\text{ **सेमी**}^2$$ उत्तर

(ii) दिया है— गोले का व्यास $= 21$ सेमी

$\therefore$ त्रिज्या $(r) = \frac{21}{2}$ सेमी

अतः गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4\pi r^2$

$$= 4 \times \frac{22}{7} \times \left(\frac{21}{2}\right)^2 = \frac{4 \times 22 \times 21 \times 21}{7 \times 2 \times 2}$$

$$= 22 \times 3 \times 21 = \mathbf{1386}\text{ **सेमी**}^2$$ उत्तर

(iii) दिया है— गोले का व्यास $= 3.5$ मीटर

$\therefore$ त्रिज्या $(r) = \frac{3.5}{2}$ मीटर

अतः गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4\pi r^2$

$$= 4 \times \frac{22}{7} \times \left(\frac{3.5}{2}\right)^2 = 4 \times \frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times \frac{3.5}{2}$$

$$= 22 \times 0.5 \times 3.5 = \mathbf{38.5}\text{ **मीटर**}^2$$ उत्तर

13. दो गोलों के आयतनों में 1 : 8 का अनुपात है। गोलों की त्रिज्याओं में अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल– माना दो गोलों की त्रिज्याएँ r_1 व r_2 हैं।

तब इनके आयतन क्रमशः $\frac{4}{3}\pi r_1^3$ तथा $\frac{4}{3}\pi r_2^3$ होंगे।

अतः गोलों के आयतनों में अनुपात $=\dfrac{\frac{4}{3}\pi r_1^3}{\frac{4}{3}\pi r_2^3}=\dfrac{1}{8}$

या $\dfrac{r_1^3}{r_2^3}=\dfrac{1}{8}$ या $\left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)^3=\left(\dfrac{1}{2}\right)^3$

या $\dfrac{r_1}{r_2}=\dfrac{1}{2}$ या $r_1 : r_2 = \mathbf{1 : 2}$ **उत्तर**

14. एक गोले की त्रिज्या 7 सेमी है, गोले का वक्रपृष्ठ तथा आयतन ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—गोले की त्रिज्या $(r) = 7$ सेमी

$$\text{गोले का वक्रपृष्ठ} = 4\pi r^2$$
$$= 4\times\frac{22}{7}\times 7^2 = \frac{4\times 22}{7}\times 7\times 7$$
$$= 4\times 22\times 7 = \mathbf{616} \textbf{ सेमी}^2$$ **उत्तर**

तथा $$\text{गोले का आयतन} = \frac{4}{3}\pi r^3$$
$$= \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}(7)^3 = \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times 7\times 7\times 7$$
$$= \frac{4312}{3} = \mathbf{1437\frac{1}{3}} \textbf{ सेमी}^3$$ **उत्तर**

15. एक गेंद का व्यास 8 सेमी है। गेंद का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—गेंद का व्यास = 8 सेमी

$\therefore$ $$\text{त्रिज्या } (r) = \frac{8}{2} = 4 \text{ सेमी}$$
$$\text{गेंद का आयतन} = \frac{4}{3}\pi r^3$$
$$= \frac{4}{3}\times\pi(4)^3 = \frac{4}{3}\times\pi\times 64$$
$$= \frac{\mathbf{256}}{\mathbf{3}}\pi \textbf{ सेमी}^3$$ **उत्तर**

16. उस गोले का आयतन ज्ञात कीजिए जिसका वक्रपृष्ठ $64\pi^3$ सेमी^{2} है।

हल– दिया है—गोले का वक्रपृष्ठ $= 4\pi r^2 = 64\pi^3$

या $$r^2 = 16\pi^2$$

या $$r = \sqrt{16\pi^2} = 4\pi$$
$$\text{गोले का आयतन} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(4\pi)^3$$
$$= \frac{4}{3}\pi\times 64\pi^3 = \frac{\mathbf{256}}{\mathbf{3}}\pi^4 \textbf{ सेमी}^3$$ **उत्तर**

17. एक अर्द्ध गोले की त्रिज्या $\frac{3}{2}$ सेमी है। अर्द्ध गोले का सम्पूर्ण पृष्ठ तथा आयतन ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—अर्द्ध गोले की त्रिज्या $(r) = \frac{3}{2}$ सेमी

अर्द्ध गोले का सम्पूर्ण पृष्ठ $= 3\pi r^2$

$$= 3 \times \pi \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 3 \times \pi \times \frac{9}{4}$$

$$= \frac{27}{4}\pi \text{ सेमी}^2$$ **उत्तर**

तथा अर्द्ध गोले का आयतन $= \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3} \times \pi \times \left(\frac{3}{2}\right)^3$

$$= \frac{2}{3} \times \pi \times \frac{27}{8} = \frac{9}{4}\pi \text{ सेमी}^3$$ **उत्तर**

18. 10 सेमी त्रिज्या वाले एक अर्द्ध गोले का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ लीजिए)

हल– दिया है—अर्द्ध गोले की त्रिज्या $= 10$ सेमी

अतः अर्द्ध गोले का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 3\pi r^2$

$$= 3 \times \pi \times (10)^2 = 3 \times \pi \times 100$$

$$= 300\pi \text{ सेमी}^2 = 300 \times 3.14$$

$$= 942 \text{ सेमी}^2$$ **उत्तर**

19. एक गोलाकार गुब्बारे में हवा भरने पर, उसकी त्रिज्या 7 सेमी से 14 सेमी हो जाती है। इन दोनों स्थितियों में गुब्बारे के पृष्ठीय क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल– गुब्बारे की प्रारम्भिक त्रिज्या $(r_1) = 7$ सेमी

अतः गुब्बारे का प्रारम्भिक पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4\pi r_1^2$

या $$(S_1) = 4 \times \frac{22}{7} \times (7)^2$$

$$= 4 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 = 616 \text{ सेमी}^2$$

गुब्बारे में और हवा भरने पर त्रिज्या $(r_2) = 14$ सेमी

अतः गुब्बारे का हवा भरने पर पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4\pi r_2^2$

या $$(S_2) = 4 \times \frac{22}{7} \times (14)^2$$

$$= 4 \times \frac{22}{7} \times 14 \times 14 = 2464 \text{ सेमी}^2$$ **उत्तर**

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{616}{2464} \quad \text{या} \quad \frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{4}$$

या $$S_1 : S_2 = 1 : 4$$ **उत्तर**

20. पीतल से बने एक अर्द्ध गोलाकार कटोरे का आन्तरिक व्यास 10.5 सेमी है। ₹ 16 प्रति 100 सेमी^{2} की दर से इसके आन्तरिक पृष्ठ पर कलई कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—अर्द्ध गोलाकार कटोरे का आन्तरिक व्यास = 10.5 सेमी

$\therefore$ कटोरे की आन्तरिक त्रिज्या $(r) = \frac{10.5}{2}$ सेमी

अर्द्ध गोलाकार कटोरे का आन्तरिक पृष्ठ $= 2\pi r^2$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times \left(\frac{10.5}{2}\right)^2 = 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{110.25}{4}$$

$$= 11 \times 15.75 = 173.25 \text{ सेमी}^2$$

कटोरे पर कलई कराने की दर = ₹ 16 प्रति 100 सेमी^{2}

या $= ₹ \frac{16}{100}$ प्रति सेमी^{2}

अतः कटोरे पर कलई कराने का व्यय $= ₹ 173.25 \times \frac{16}{100} = ₹$ **27.72** उत्तर

21. एक लोहे का ठोस गोला जिसका व्यास 12 सेमी है, एक 24 सेमी व्यास वाले बेलनाकार बर्तन में जिसमें कुछ पानी भरा है, डाल दिया जाता है। ज्ञात कीजिए कि गोले के पूरा डूब जाने पर पानी की सतह कितनी ऊपर उठ जाएगी?

हल– दिया है—ठोस गोले का व्यास = 12 सेमी

$\therefore$ ठोस गोले की त्रिज्या $(r) = \frac{12}{2} = 6$ सेमी

ठोस गोले का आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \times (6)^3$

$$= \frac{4}{3}\pi \times 6 \times 6 \times 6 = 288\pi \text{ सेमी}^3$$

तथा बेलनाकार बर्तन का व्यास = 24 सेमी

$\therefore$ त्रिज्या $(r_1) = \frac{24}{2} = 12$ सेमी

माना बेलनाकार बर्तन में ठोस गोला डालने पर पानी की सतह में h ऊँचाई की वृद्धि होती है।

अतः बेलनाकार बर्तन में ऊपर उठे पानी का आयतन = ठोस गोले का आयतन

$$\pi r_1^2 h = 288\pi$$

या $\pi \times 12^2 h = 288\pi$

$\Rightarrow \pi \times 144 \times h = 288\pi$

या $h = \frac{288\pi}{144\pi} = $ **2 सेमी** उत्तर

22. एक बेलनाकार बर्तन का व्यास 21 सेमी है। इसमें कुछ पानी भरा है। एक ठोस गोला जिसका व्यास 10.5 सेमी है, उस बर्तन में डाल दिया जाता है। गोला पानी में डूब जाता है। गणना कीजिए कि पानी का तल कितना ऊपर उठ जाएगा?

हल– दिया है—ठोस गोले का व्यास = 10.5 सेमी

$\therefore$ गोले की त्रिज्या $(r) = \dfrac{10.5}{2}$ सेमी

ठोस गोले का आयतन $= \dfrac{4}{3}\pi r^3$

$$= \frac{4}{3}\pi \times \left(\frac{10.5}{2}\right)^3 \text{ सेमी}^3$$

बेलनाकार बर्तन का व्यास $= 21$ सेमी

$\therefore$ त्रिज्या $(r_1) = \dfrac{21}{2} = 10.5$ सेमी

माना ठोस गोले को बेलनाकार बर्तन में डालने पर पानी का तल h सेमी ऊपर उठ जाता है।

अत: बेलनाकार बर्तन में ऊपर उठे पानी का आयतन $= \pi r_1^2 h = \pi (10.5)^2 h$ सेमी^{3}

परन्तु, बेलनाकार बर्तन में ऊपर उठे पानी का आयतन = ठोस गोले का आयतन

$$\pi (10.5)^2 h = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{10.5}{2}\right)^3$$

या $h = \dfrac{4}{3} \times \dfrac{10.5}{8} = \dfrac{3.5}{2} = $ **1.75 सेमी** उत्तर

23. उस गोले की त्रिज्या ज्ञात कीजिए जिसका पृष्ठीय क्षेत्रफल 154 सेमी^{2} है।

हल– माना दिए गए गोले की त्रिज्या $= r$ सेमी

अत: गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4\pi r^2$

या $154 = 4\pi r^2$ या $154 = 4 \times \dfrac{22}{7} r^2$

या $r^2 = \dfrac{7 \times 154}{4 \times 22} = \dfrac{7 \times 7}{4}$

या $r = \sqrt{\dfrac{7 \times 7}{4}} = \dfrac{7}{2} = $ **3.5 सेमी** उत्तर

24. चन्द्रमा का व्यास पृथ्वी के व्यास का लगभग एक-चौथाई है। इन दोनों के पृष्ठीय क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल– माना पृथ्वी का व्यास $= 2R$

तब चन्द्रमा का व्यास $= \dfrac{1}{4} \times 2R = \dfrac{R}{2}$

$\therefore$ पृथ्वी की त्रिज्या $= \dfrac{2R}{2} = R$

तथा चन्द्रमा की त्रिज्या $= \dfrac{R/2}{2} = \dfrac{R}{4}$

चन्द्रमा का पृष्ठीय क्षेत्रफल $(S_1) = 4\pi\left(\dfrac{R}{4}\right)^2$

$$= 4\pi \times \frac{R^2}{16} = \frac{\pi R^2}{4}$$

तथा पृथ्वी का पृष्ठीय क्षेत्रफल $(S_2) = 4\pi(R)^2 = 4\pi R^2$

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{\pi R^2}{4}}{4\pi R^2}=\frac{\pi R^2}{16\pi R^2}=\frac{1}{16}$$

या $S_1 : S_2 = 1:16$ उत्तर

25. एक अर्द्धगोलाकार कटोरा 0.25 सेमी मोटी स्टील से बना है। इस कटोरे की आन्तरिक त्रिज्या 5 सेमी है। कटोरे का बाहरी वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—अर्द्ध गोलाकार कटोरे की आन्तरिक त्रिज्या $r = 5$ सेमी

तथा कटोरे की मोटाई $= 0.25$ सेमी

अतः अर्द्ध गोलाकार कटोरे की बाहरी त्रिज्या $(R) = 5 + 0.25 = 5.25$ सेमी

$\therefore$ अर्द्ध गोलाकार कटोरे का बाहरी पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi R^2$

$$= 2\times\frac{22}{7}\times(5.25)^2 = 2\times\frac{22}{7}\times 5.25\times 5.25$$

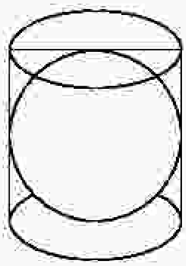
$$= 2\times 22\times 0.75\times 5.25 = \mathbf{173.25}\ \textbf{सेमी}^2$$ उत्तर

26. एक लम्बवृत्तीय बेलन, त्रिज्या r वाले एक गोले को पूर्णतः घेरे हुए है (दी गई आकृति देखिए) और ज्ञात कीजिए—

(i) गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल

(ii) बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

(iii) ऊपर (i) व (ii) में प्राप्त क्षेत्रफलों का अनुपात



हल– दिया है—गोले की त्रिज्या $= r$

$\because$ लम्बवृत्तीय बेलन गोले को पूर्णतः घेरे हुए है।

$\therefore$ लम्बवृत्तीय बेलन की त्रिज्या = गोले की त्रिज्या $= r$

तथा ऊँचाई (h) = गोले का व्यास $= 2r$

(i) गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल $(S_1) = 4\pi r^2$

(ii) बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $(S_2) = 2\pi rh = 2\pi r\times 2r = 4\pi r^2$

(iii) $$\frac{S_1}{S_2}=\frac{4\pi r^2}{4\pi r^2}=\frac{1}{1}$$

या $S_1 : S_2 = 1:1$ उत्तर

27. किसी लम्बवृत्तीय बेलन और लम्बवृत्तीय शंकु की ऊँचाई और आधार के व्यास समान हैं तथा प्रत्येक की माप 6 सेमी है। इसके अतिरिक्त 3 सेमी त्रिज्या का एक गोला है तो बेलन, शंकु और गोले के आयतनों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—लम्बवृत्तीय बेलन का व्यास = लम्बवृत्तीय शंकु का व्यास = 6 सेमी

$\therefore$ बेलन की त्रिज्या = शंकु की त्रिज्या $(r) = \frac{6}{2} = 3$ सेमी

तथा बेलन की ऊँचाई = शंकु की ऊँचाई $(h) = 6$ सेमी

तथा गोले की त्रिज्या $(r) = 3$ सेमी

बेलन का आयतन $V_1 = \pi r^2 h = \pi\times 3^2\times 6 = \pi\times 9\times 6 = 54\pi$ सेमी^{3}

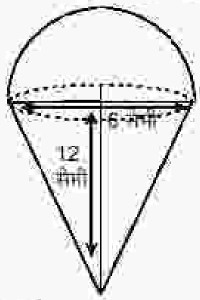
शंकु का आयतन $V_2 = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\times\pi\times 3^2\times 6 = 18\pi$ सेमी^{3}

गोले का आयतन $V_3 = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\times\pi\times(3)^3 = 36\pi$ सेमी^{3}

अतः $V_1 : V_2 : V_3 = 54\pi : 18\pi : 36\pi$

$= \mathbf{3 : 2 : 1}$ **उत्तर**

28. आइसक्रीम का आयतन ज्ञात कीजिए। जो 12 सेमी ऊँचे और 6 सेमी व्यास के लम्बवृत्तीय शंकु को भरने के बाद उसके ऊपर अर्द्ध गोले का आकार बनाती है ($\pi = 3.14$)



हल– दिया है—लम्बवृत्तीय शंकु का व्यास = 6 सेमी

$\therefore$ त्रिज्या $(r) = \frac{6}{2}$ सेमी = 3 सेमी

तथा ऊँचाई $(h) = 12$ सेमी

आइसक्रीम के अर्द्ध गोले की त्रिज्या $(r) = 3$ सेमी

शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{1}{3}\pi \times (3)^2 \times 12 = 36\pi$ सेमी^{3}

अर्द्ध गोले का आयतन $= \frac{2}{3}\pi r^3$

$= \frac{2\pi}{3} \times 3^3 = 18\pi$ सेमी

अतः आइसक्रीम का आयतन $= 36\pi + 18\pi$

$= (36 + 18)\pi = 54 \times \pi$

$= 54 \times 3.14 = \mathbf{169.56}$ **सेमी^{3}** **उत्तर**

29. ज्ञात कीजिए कि किसी धातु के 14 सेमी त्रिज्या वाले एक गोले को पिघलाकर 3.5 सेमी व्यास तथा 8 सेमी ऊँचाई के कितने लम्बवृत्तीय शंकु बनाए जा सकते हैं?

हल– दिया है—धातु के गोले की त्रिज्या $(R) = 14$ सेमी

$\therefore$ धातु के गोले का आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \times \pi (14)^3$ सेमी^{3}

धातु के गोलों को पिघलाकर बनाए गए शंकुओं की त्रिज्या $(r) = \frac{3.5}{2}$ सेमी

तथा ऊँचाई $(h) = 8$ सेमी

अतः प्रत्येक शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{1}{3}\pi \left(\frac{3.5}{2}\right)^2 \times 8$ सेमी

अब, शंकुओं की संख्या $= \frac{\text{गोले का आयतन}}{\text{शंकु का आयतन}}$

$$= \frac{\frac{4}{3}\pi (14)^3}{\frac{1}{3}\pi \left(\frac{3.5}{2}\right)^2 \times 8}$$

$$= \frac{(14)^3}{\left(\frac{3.5}{2}\right)^2 \times 2} = \frac{14 \times 14 \times 14}{\frac{3.5}{2} \times \frac{3.5}{2} \times 2}$$

$$= \frac{14 \times 14 \times 14 \times 2}{3.5 \times 3.5} = 4 \times 4 \times 14 \times 2$$

$= \textbf{448}$ **सेमी**^{3} उत्तर

30. एक शंकु एवं एक गोलार्द्ध समान आधार तथा समान आयतन के हैं। शंकु तथा गोलार्द्ध की ऊँचाइयों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—शंकु एवं गोलार्द्ध के आधार समान हैं।

अत: शंकु की त्रिज्या = गोले की त्रिज्या = r (माना)

माना शंकु की ऊँचाई = h, गोलार्द्ध की ऊँचाई = त्रिज्या = r

तथा शंकु का आयतन = गोलार्द्ध का आयतन

$$\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{2}{3}\pi r^3$$

या $h = 2r$

या $\frac{h}{r} = \frac{2}{1}$

या $h : r = \mathbf{2 : 1}$ उत्तर

31. एक शंकु 216 सेमी ऊँचा है तथा इसके आधार की त्रिज्या 16 सेमी है। इसे पिघलाकर एक गोले के रूप में ढाला गया है। गोले की त्रिज्या बताइए।

हल– दिया है—शंकु के आधार की त्रिज्या $(r) = 16$ सेमी

तथा ऊँचाई $(h) = 216$ सेमी

अत: शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(16)^2 \times 216$

$= \frac{1}{3}\pi \times 256 \times 216$ सेमी^{3}

माना शंकु को पिघलाकर बनाए गए गोले की त्रिज्या = R

$\therefore$ गोले का आयतन $= \frac{4}{3}\pi R^3$

परन्तु, गोले का आयतन = शंकु का आयतन

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{3}\pi \times 256 \times 216$$

या $R^3 = 64 \times 216$

या $R = \sqrt[3]{64 \times 216}$

$= 4 \times 6 = \mathbf{24}$ **सेमी** उत्तर

32. एक ठोस लम्बवृत्तीय शंकु की ऊँचाई 2 सेमी तथा त्रिज्या 4 सेमी है। ज्ञात कीजिए कि शंकु को पिघलाकर 1 सेमी के व्यास वाले कितने गोले बनाए जा सकते हैं?

हल– दिया है—ठोस शंकु की ऊँचाई $(h) = 2$ सेमी

तथा त्रिज्या $(r) = 4$ सेमी

अतः शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$$= \frac{1}{3} \times \pi \times 4^2 \times 2 = \frac{32}{3}\pi \text{ सेमी}^3$$

ठोस शंकु को पिघलाकर बनाए गए गोलों का व्यास = 1 सेमी

∴ त्रिज्या $(r') = \frac{1}{2}$ सेमी

∴ प्रत्येक गोले का आयतन $= \frac{4}{3}\pi r'^3$

$$= \frac{4}{3}\pi\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi \times \frac{1}{8} = \frac{\pi}{6} \text{ सेमी}^3$$

अतः गोलों की संख्या $= \frac{\text{शंकु का आयतन}}{\text{1 गोले का आयतन}}$

$$= \frac{\frac{32}{3}\pi}{\frac{\pi}{6}} = \frac{32 \times 6}{3} = \mathbf{64}$$ उत्तर

33. किसी धातु के एक ठोस लम्बवृत्तीय शंकु की ऊँचाई 48 सेमी तथा आधार की त्रिज्या 12 है। शंकु को पिघलाकर एक ठोस गोला बनाया जाता है। गोले की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—ठोस लम्बवृत्तीय शंकु की ऊँचाई $(h) = 48$ सेमी

तथा आधार की त्रिज्या $(h) = 12$ सेमी

∴ ठोस शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$$= \frac{1}{3} \times \pi (12)^2 \times 48 = \pi \times 144 \times 16 \text{ सेमी}^3$$

माना ठोस शंकु को पिघलाकर बनाए गए ठोस गोले की त्रिज्या $= r$

∴ गोले का आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3$

परन्तु, गोले का आयतन = शंकु का आयतन

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \pi \times 144 \times 16$$

$$r^3 = 144 \times 12$$

या $r^3 = 12 \times 12 \times 12 = 12^3$

या $r = \sqrt[3]{12^3} = \mathbf{12}$ **सेमी** उत्तर

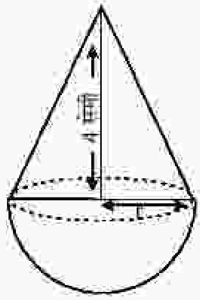
34. एक ही आधार में एक अर्द्धगोला तथा एक लम्बवृत्तीय शंकु का ठोस बनाया गया है। यदि ठोस का सम्पूर्ण आयतन $\frac{32\pi}{3}$ घन सेमी और शंकु की ऊँचाई 4 सेमी हो, तो आधार की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—अर्द्धगोला एवं शंकु एक ही आधार पर है।

माना आधार की त्रिज्या $= r$ सेमी

तथा शंकु की ऊँचाई $(h) = 4$ सेमी

सम्पूर्ण ठोस का आयतन = शंकु का आयतन + अर्द्धगोले का आयतन



$$\frac{32\pi}{3} = \frac{1}{3}\pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3$$

या $\quad 32 = r^2 \times 4 + 2r^3$

या $\quad 16 = 2r^2 + r^3$

या $\quad r^3 + 2r^2 - 16 = 0$

या $\quad r^3 - 2r^2 + 4r^2 - 8r + 8r - 16 = 0$

या $\quad r^2(r-2) + 4r(r-2) + 8(r-2) = 0$

या $\quad (r-2)(r^2 + 4r + 8) = 0$

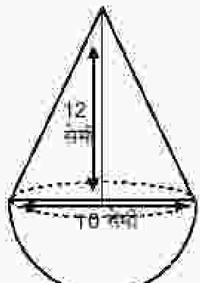
यदि $r - 2 = 0$ तब $r = 2$ **सेमी**

तथा $r^2 + 4r + 8 = 0$ जो मान्य नहीं है।

अतः आधार की अभीष्ट त्रिज्या = **2 सेमी** उत्तर

35. कोई ठोस एक अर्द्ध गोले के समतल पृष्ठ पर खड़े एक शंकु के आकार का है। अर्द्ध गोले के समतल पृष्ठ का व्यास तथा शंकु के आधार का व्यास 10 सेमी है और शंकु की ऊँचाई 12 सेमी है। इस ठोस का वक्रपृष्ठ और आयतन ज्ञात कीजिए।

हल– ठोस की आकृति चित्रानुसार है, जिसमें शंकु व अर्द्धगोले का एक आधार है। जिसका व्यास = 10 सेमी



$\therefore$ शंकु की त्रिज्या = अर्द्ध गोले की त्रिज्या

$$(r) = \frac{10}{2} = 5 \text{ सेमी}$$

शंकु की ऊँचाई $(h) = 12$ सेमी

शंकु की तिर्यक ऊँचाई $l = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{12^2 + 5^2}$

$$= \sqrt{169} = 13 \text{ सेमी}$$

ठोस का वक्रपृष्ठ = शंकु का वक्रपृष्ठ + अर्द्ध गोले का वक्रपृष्ठ

$$= \pi rl + 2\pi r^2 = \pi r(l + 2r)$$

$$= \pi \times 5(13 + 2 \times 5) = \pi \times 5(13 + 10)$$

$$= \pi \times 5 \times 23 = 115\pi \text{ सेमी}^2$$

ठोस का आयतन = शंकु का आयतन + अर्द्ध गोले का आयतन

$$= \frac{1}{3}\pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3}\pi r^2 (h + 2r)$$

$$= \frac{1}{3}\pi \times 5^2 (12 + 2 \times 5)$$

$$= \frac{25}{3}\pi \times (12 + 10)$$

$$= \frac{25}{3}\pi \times 22 = \frac{\mathbf{550}}{\mathbf{3}}\pi \textbf{ सेमी}^3$$ उत्तर

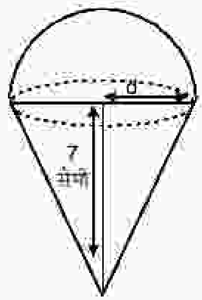
36. एक ही आधार पर एक लम्बवृत्तीय शंकु तथा अर्द्ध गोले से एक ठोस निर्मित हुआ है। ठोस का सम्पूर्ण आयतन 80 π घन सेमी तथा शंकु की ऊँचाई 7 सेमी है। ठोस के आधार का व्यास ज्ञात कीजिए।

हल– चित्रानुसार, माना ठोस के उभयनिष्ठ आधार की त्रिज्या = r सेमी

दिया है—शंकु की ऊँचाई $(h) = 7$ सेमी

ठोस का सम्पूर्ण आयतन = शंकु का आयतन + अर्द्ध गोले का आयतन

या $$80\pi = \frac{1}{3}\pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3$$



या $$80 = \frac{1}{3}r^2 h + \frac{2}{3}r^3$$

या $$80 = \frac{1}{3}r^2 \times 7 + \frac{2}{3}r^3$$

या $$240 = 7r^2 + 2r^3$$

या $$2r^3 + 7r^2 - 240 = 0$$

या $2r^3 - 8r^2 + 15r^2 - 60r + 60r - 240 = 0$

या $2r(r-4) + 15r(r-4) + 60(r-4) = 0$

या $(r-4)(2r + 15r + 60) = 0$

यदि $2r + 15r + 60 = 0$ जो अमान्य है

तथा यदि $r - 4 = 0$ तो $r = 4$ सेमी

अतः ठोस के आधार का व्यास $= 2r = 2 \times 4 =$ **8 सेमी** **उत्तर**

37. उभयनिष्ठ आधार पर अर्द्धगोले तथा एक लम्बवृत्तीय शंकु को रखकर एक ठोस बनाया गया है। ठोस का सम्पूर्ण आयतन 64 π घन सेमी तथा शंकु की ऊँचाई 4 सेमी है। ठोस के उभयनिष्ठ आधार की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल– माना, अर्द्ध गोले व शंकु के उभयनिष्ठ आधार की त्रिज्या = r सेमी

दिया है—शंकु की ऊँचाई $(h) = 4$ सेमी

अतः शंकु का आयतन + अर्द्धगोले का आयतन = सम्पूर्ण ठोस का आयतन

या $$\frac{1}{3}\pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3 = 64\pi$$

या $$r^2 h + 2r^3 = 192$$

या $$r^2 \times 4 + 2r^3 = 192$$

या $$2r^3 + 4r^2 - 192 = 0$$

या $$r^3 + 2r^2 - 96 = 0$$

या $$r^3 - 4r^2 + 6r^2 - 24r + 24r - 96 = 0$$

या $$r^2(r-4) + 6r(r-4) + 24(r-4) = 0$$

या $$(r-4)(r^2 + 6r + 24) = 0$$

या $r - 4 = 0$ (यहाँ समीकरण $r^2 + 6r + 24 = 0$ के सभी मूल काल्पनिक होने के कारण छोड़ने पर)

या $r =$ **4 सेमी** **उत्तर**

38. व्यास 10.5 सेमी वाले एक अर्द्ध गोलाकार कटोरे में कितना दूध आ सकता है?

हल– दिया है—अर्द्ध गोलाकार कटोरे का व्यास = 10.5 सेमी

$$\text{त्रिज्या } (r) = \frac{10.5}{2} \text{ सेमी}$$

अत: कटोरे में दूध की मात्रा = कटोरे का आयतन

$$= \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times \left(\frac{10.5}{2}\right)^3$$

$$= \frac{2 \times 22 \times 10.5 \times 10.5 \times 10.5}{3 \times 7 \times 2 \times 2 \times 2}$$

$$= \frac{11 \times 3.5 \times 1.5 \times 10.5}{2} = \frac{606.375}{2}$$

$$= 303.18 \text{ सेमी}^3$$

या $= \dfrac{303.18}{1000}$ लीटर

या $= \mathbf{0.303}$ **लीटर** उत्तर

39. एक अर्द्ध गोलाकार टंकी 1 सेमी मोटी एक लोहे की चादर से बनी है। यदि इसकी आन्तरिक त्रिज्या 1 मीटर है तो टंकी के बनाने में लगे लोहे का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल– दिया है—अर्द्ध गोलाकार टंकी की आन्तरिक त्रिज्या $(r) = 1$ मीटर

तथा टंकी की मोटाई = 1 सेमी $= \dfrac{1}{100}$ मीटर = 0.01 मीटर

अत: टंकी की बाहरी त्रिज्या $(R) = 1 + 0.01 = 1.01$ मीटर

टंकी में लगे लोहे का आयतन = टंकी का बाहरी आयतन – टंकी का भीतरी आयतन

$$= \frac{2}{3}\pi R^3 - \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi(R^3 - r^3)$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7}[(1.01)^3 - 1^3]$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7}[1.03 - 1]$$

$$= \frac{44}{3 \times 7} \times 0.03 = \frac{44 \times 0.01}{7}$$

$$= \frac{0.44}{7} = \mathbf{0.0628 \text{ मीटर}^3}$$ उत्तर

40. उस गोले का आयतन ज्ञात कीजिए जिसका पृष्ठीय क्षेत्रफल 154 सेमी² है।

हल– दिया है—गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल = 154 सेमी^{2}

या $4\pi r^2 = 154$

या $4 \times \dfrac{22}{7} r^2 = 154$

या $r^2 = \dfrac{154 \times 7}{4 \times 22}$

या $$r^2 = \frac{7\times 7}{4} = \frac{49}{4}$$

या $$r = \sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{7}{2} \text{ सेमी}$$

अतः गोले का आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$$= \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\left(\frac{7}{2}\right)^3$$

$$= \frac{4\times 22\times 7\times 7\times 7}{3\times 7\times 2\times 2\times 2} = \frac{11\times 7\times 7}{3}$$

$$= \frac{539}{3} = 179\frac{2}{3} \text{ सेमी}^3$$ उत्तर

41. किसी भवन का गुंबद एक अर्द्ध गोले के आकार का है। अंदर से इसमें सफेदी कराने में ₹498.96 व्यय हुए। यदि सफेदी कराने की दर ₹2 प्रति वर्ग मीटर है, तो ज्ञात कीजिए—
(i) गुंबद का आंतरिक वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल (ii) गुंबद के अंदर की हवा का आयतन।

हल– दिया है—गुंबद के अन्दर सफेदी कराने का व्यय = ₹498.96

सफेदी कराने की दर = ₹2 प्रति वर्ग मीटर

अतः अर्द्ध गोलाकार गुंबद का आंतरिक वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \frac{498.96}{2}$

$= 249.48$ **मीटर^2** उत्तर

पुनः अर्द्ध गोलाकार गुंबद का आंतरिक वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = 249.48 मीटर^2

या $$2\pi r^2 = 249.48$$

या $$\frac{2\times 22}{7} r^2 = 249.48$$

या $$r^2 = \frac{349.48\times 7}{2\times 22}$$

या $$r^2 = 5.67\times 7 = 39.69$$

या $$r = \sqrt{39.69} = 6.3 \text{ मीटर}$$

अतः अर्द्ध गोलाकार गुंबद के अन्दर की हवा का आयतन

= अर्द्धगोलाकार गुंबद का आयतन

या $$= \frac{2}{3}\pi r^3$$

या $$= \frac{2}{3}\times\frac{22}{7}\times(6.3)^3$$

या $$= \frac{2\times 22\times 6.3\times 6.3\times 6.3}{21}$$

या $$= 44\times 0.3\times 6.3\times 6.3$$

या $$= 523.9 \text{ मीटर}^3$$ उत्तर

42. लोहे के 27 ठोस गोलों को पिघलाकर, जिनमें से प्रत्येक की त्रिज्या r और पृष्ठीय क्षेत्रफल S है, एक बड़ा गोला बनाया जाता है, जिसका पृष्ठीय क्षेत्रफल S' है, ज्ञात कीजिए—

(i) नए गोले की त्रिज्या r'

(ii) S और S' का अनुपात।

हल– दिया है—लोहे के छोटे गोलों की त्रिज्या $= r$

अतः प्रत्येक गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल $S = 4\pi r^2$

तथा 1 गोले का आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$\therefore$ 27 गोलों का आयतन $= 27 \times \frac{4}{3}\pi r^3$

$$= 36\pi r^3$$

$\because$ छोटे गोलों को पिघलाकर एक बड़ा गोला बनाया जाता है, जिसकी त्रिज्या r' है।

बड़े गोले का आयतन $= \frac{4}{3}\pi r'^3$

बड़े गोले का आयतन $=$ 27 छोटे गोलों का आयतन

$$\frac{4}{3}\pi r'^3 = 36\pi r^3$$

या $r'^3 = \dfrac{3 \times 36\pi r^3}{4 \times \pi}$

या $r'^3 = 27r^3$

या $r' = \sqrt[3]{27r^3}$

या $r' = 3r$ **उत्तर**

गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल $(S') = 4\pi r'^2$

या $S' = 4\pi(3r)^2$

$$= 4\pi \times 9r$$

$$= 36\pi r^2$$

तथा $\dfrac{S}{S'} = \dfrac{4\pi r^2}{36\pi r^2}$

$$= \frac{1}{9}$$

या $S : S' = 1 : 9$ **उत्तर**

43. दवाई का एक कैप्सूल (capsule) 3.5 मिमी व्यास का एक गोला (गोली) है। इस कैप्सूल को भरने के लिए कितनी दवाई (मिमी^{3} में) की आवश्यकता होगी?

हल– दिया है—गोलाकार दवाई के कैप्सूल का व्यास = 3.5 मिमी

$\therefore$ त्रिज्या $(r) = \frac{3.5}{2}$ मिमी

कैप्सूल को भरने के लिए आवश्यक दवाई = कैप्सूल का आयतन

$$= \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times \left(\frac{3.5}{2}\right)^3$$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times \frac{3.5}{2} \times \frac{3.5}{2}$$

$$= \frac{11 \times 0.5 \times 3.5 \times 3.5}{3}$$

$$= \frac{67.375}{3}$$

$$= 22.46 \text{ मिमी}^3$$ उत्तर

बहुविकल्पीय प्रश्न

नोट– बहुविकल्पीय प्रश्नों के उत्तर जानने के लिए पाठ्य पुस्तक के पृष्ठ संख्या 343 व 344 का अवलोकन कीजिए।