

5. लघुतम समापवर्त्य और महत्तम समापवर्तक

5 लघुतम समापवर्त्य और महत्तम समापवर्तक

शिक्षिका - शानी, हम कैसे पता करेंगे कि संख्याएँ 410 और 332, 2 से विभाजित होती हैं ?

रानी - भाग दे कर।

शिक्षिका - शाबाश! बलविन्दर, अब तुम बताओ कैसे पता करें कि 330 और 117, 3 से विभाजित होती हैं ?

बलविन्दर - मैडम, संख्याओं में भाग देकर।

शिक्षिका - बहुत अच्छा! संख्याओं की विभाज्यता को हम और आसानी से बिना पूरी तरह से संख्याओं को विभाजित किए पता कर सकते हैं।

किसी संख्या में 2, 3, 4, 5, 6, 8, 12 और 16 से विभाज्यता की जाँच

2 से विभाज्य संख्याएँ

कोई भी संख्या जिसका इकाई का अंक 2 से विभाजित होता है, वह संख्या 2 से पूरी-पूरी विभाजित हो जाती है। जैसे- 510, 6452 ...

3 से विभाज्य संख्याएँ

यदि किसी संख्या के अंकों का योग 3 से विभाजित हो तो वह संख्या 3 से विभाजित होती है। जैसे- 729, 24129 ...

4 से विभाज्य संख्याएँ

संख्याओं 124, 3428, 100, 1200 को देखो।

प्रथम दो संख्याओं में इकाई और दहाई से बनी संख्याएँ 24 और 28 हैं।

ये संख्याएँ 4 से पूरी-पूरी विभाजित हो जाती हैं अर्थात् ये 4 से विभाज्य हैं।

अतः यदि किसी संख्या के इकाई और दहाई के अंकों से बनी संख्या 4 से विभाजित होती है तो वह संख्या 4 से विभाज्य होगी। जिस संख्या के इकाई और दहाई के अंक शून्य हों, वह संख्या भी 4 से विभाजित होती है।

गिनतारा 5

8 से विभाज्य संख्याएँ

यदि किसी संख्या के इकाई के स्थान पर 0 या 5 हो तो वह संख्या 5 से विभाजित होती है। जैसे- 340, 7690, 5785

8 से विभाज्य संख्याएँ

संख्याओं 12, 36, 48, 300 को देखो।

ये संख्याएँ 2 तथा 3 दोनों से विभाज्य हैं।

अतः ये 2 और 3 के गुणनफल 6 से भी विभाज्य होंगी।

ऐसी संख्याएँ जो 2 और 3 दोनों से विभाज्य हों, वे 6 से भी विभाजित होती हैं।

8 से विभाज्य संख्याएँ

संख्याओं 1000, 15000, 15128, को देखो।

संख्याओं 1000 तथा 15000 में इकाई, दहाई और सैकड़े के स्थानों पर शून्य है।

संख्याएँ 1000 तथा 15000 दोनों ही 8 से विभाज्य हैं।

15128 में इकाई, दहाई और सैकड़े के स्थानों वाले अंकों से बनी संख्या 128 है।

संख्या 128, 8 से विभाज्य है क्योंकि $128 \div 8 = 16$

अतः ऐसी संख्याएँ जिनमें इकाई, दहाई और सैकड़े दोनों स्थानों पर शून्य हों, वे संख्याएँ 8 से विभाज्य होंगी।

ऐसी संख्याएँ जिनके इकाई, दहाई और सैकड़े के अंकों से बनी संख्याएँ 8 से विभाज्य हों, वे संख्याएँ भी 8 से पूरी-पूरी विभाजित होती हैं।

12 से विभाज्य संख्याएँ -

संख्याओं 12, 36, 60, को देखो -

ये 3 और 4 दोनों से विभाज्य हैं।

अतः ये संख्याएँ 12 से भी विभाज्य होंगी।

अतः ऐसी संख्याएँ जो 3 तथा 4 दोनों से विभाज्य होती हैं, वे 12 से भी विभाज्य होंगी।

इसी प्रकार हम 15 से विभाज्यता की जाँच कर सकते हैं। ऐसी संख्याएँ जो 3 और 5 से विभाजित हैं वे 15 से भी विभाज्य होती हैं।



लघुतम समापवर्त्य (Least Common Multiple)

लघुतम समापवर्त्य की अभाज्य गुणनखण्ड विधि (L.C.M. by Prime Factorization)

$$15 = 3 \times 5$$

(यहाँ 15 एवं 20 को अभाज्य संख्याओं के

$$20 = 2 \times 2 \times 5$$

गुणनखण्डों में विभाजित किया गया है।)

हमने देखा कि हरी पट्टी में लिखी संख्या 5 उभयनिष्ठ अपवर्तक है जबकि 3, 2 एवं 2, दो नई संख्याओं के उभयनिष्ठ अपवर्तक नहीं हैं।

ल0स0 ज्ञात करने के लिए हम उभयनिष्ठ अपवर्तकों में उन सभी अपवर्तकों का गुणा करते हैं जो उभयनिष्ठ नहीं हैं। प्राप्त गुणनफल ही ल0स0 होता है।

$$\begin{aligned} \text{अतः ल0स0} &= 5 \times 2 \times 2 \times 3 \\ &= 60 \end{aligned}$$

इसे भी देखो—

8, 12 एवं 30 का ल0स0

$$\begin{array}{l} 8 = 2 \times 2 \times 2 \\ 12 = 2 \times 2 \times 3 \\ 30 = 2 \times 3 \times 5 \end{array}$$

लघुतम समापवर्त्य के लिए

- सबसे पहले हम उन सभी समापवर्त्य का आपस में केवल एक बार गुणा करते हैं, जो कम से कम दो संख्याओं के गुणनखण्डों में उभयनिष्ठ है।

जैसे— हरी पट्टी में लिखा '2', लाल पट्टी में लिखा '2' तथा पीली पट्टी में लिखा '3' उभयनिष्ठ है।

$$2 \times 2 \times 3$$

- फिर जो गुणनखण्ड (अपवर्तक) उभयनिष्ठ नहीं हैं, उनका गुणा भी इन उभयनिष्ठ अपवर्तकों के साथ करते हैं। इस प्रकार प्राप्त गुणनफल ही ल0स0 होता है।

$$2 \times 2 \times 3 \times 2 \times 5 = 120$$

अतः 8, 12 एवं 30 का ल0स0 120 है।



महत्तम समापवर्तक (Highest Common Factor or Greatest Common Divisor)

नीचे दी गई संख्याओं को देखें -

1, 3, 10, 18, 19

- दी हुई संख्याओं में कौन-कौन सी सम संख्याएँ हैं ?
- दी हुई संख्याओं में कौन-कौन सी विषम संख्याएँ हैं ?
- दी हुई संख्याओं में कौन-कौन सी अभाज्य संख्याएँ हैं ?
- क्या 18 और 19 सह-अभाज्य संख्याएँ हैं ?
- दी हुई संख्याओं में कौन-कौन सी संख्याएँ भाज्य हैं ?
- दी हुई संख्याओं में कौन-कौन सी संख्याएँ हैं, जो न तो भाज्य है न अभाज्य ?

गुणनखण्ड विधि द्वारा महत्तम समापवर्तक

आओ देखें- 15 और 18 का अभाज्य गुणनखण्ड

$$15 = 3 \times 5$$

(क्यों 15 एव 18 को अभाज्य संख्याओं के

$$18 = 2 \times 3 \times 3$$

गुणनखण्डों में विभाजित किया गया है।)

ऐसी विधि, जिसमें किसी संख्या को अभाज्य गुणनखण्डों में बाँटते हैं, उसे अभाज्य

गुणनखण्ड विधि कहते हैं।

- गुणनखण्ड विधि से 8, 12 एवं 16 का म0स0 -

$$8 = 2 \times 2 \times 2$$

$$12 = 2 \times 2 \times 3$$

$$16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

हमने देखा कि, 8, 12 एवं 16 के गुणनखण्डों में इन्हीं पदों में लिखी संख्या '2' तथा लाल पदों में लिखी हुई संख्या '2', तीनों संख्याओं के गुणनखण्डों में सम्यन्वित हैं।

इन सम्यन्वित संख्याओं का गुणनफल ही म0स0 होगा।

$$\text{अतः } 2 \times 2 = 4$$

दी हुई संख्याओं 8, 12 एवं 16 का म0स0 4 है।



स्वयं करो-

अभाज्य गुणनखण्ड विधि द्वारा म0स0 ज्ञात करो-

- 5 एवं 15 का
- 12, 21 एवं 24 का

वार्षिक प्रश्न

उदाहरण 1 : किसी कक्षा के बच्चों को 16, 24 अथवा 36 की टोशियों में बाँटा जा सकता है। उस कक्षा में कम से कम कुल कितने बच्चे होंगे ?

देखो : कक्षा में बच्चों की कुल संख्या, दो हुई संख्याओं के लघुगुण के बराबर होगी।

अतः संख्याओं 16, 24 और 36 का लघुगुण निकालना होगा—

गुणनखण्ड करने पर —

$$16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

$$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

$$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$$

$$16, 24 \text{ एवं } 36 \text{ का लघुगुण} = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 144$$

अतः कक्षा में बच्चों की कुल संख्या = 144

उदाहरण 2 : तीन बर्तनों में क्रमशः 28, 56 और 84 लीटर तेल है। उस बड़े-बड़े से बर्तन की माप बताओ जिससे तीनों बर्तनों का तेल पूरा-पूरा कर मापा जा सके।

देखो : तेल को पूरा-पूरा मापने के लिए 28, 56 और 84 का लघुगुण ज्ञात करना होगा—

गुणनखण्ड करने पर —

$$28 = 2 \times 2 \times 7$$

$$56 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 7$$

$$84 = 2 \times 2 \times 3 \times 7$$

$$28, 56 \text{ एवं } 84 \text{ का लघुगुण} = 2 \times 2 \times 2 \times 7 = 28$$

अतः सबसे बड़े बर्तन की माप 28 लीटर है।

हम सीख गए

- किसी दी हुई संख्या के अपवर्त्य एवं अपवर्तकों को समझकर लिखना।
- दो या तीन संख्याओं का लघुगुण एवं लघुगुण गुणनखण्ड विधि से ज्ञात करना।

अभ्यास



- निम्नलिखित संख्याओं में कौन-कौन सी संख्याएँ 2, 3 और 6 तीनों से विभाज्य हैं ?
(क) 80 (ख) 96 (ग) 75 (घ) 82
- सबसे छोटा वह अंक ज्ञात करो जिसको लिखने पर नीचे दी हुई संख्याएँ 3 से पूर्णतः विभाजित हो जाएँ -
(क) 53— 35 (ख) 387— (ग) 3— 45
- एक ताल रिबन की लम्बाई 30 सेंटीमीटर है और सफेद रिबन की लम्बाई 42 सेंटीमीटर है। उस बड़े-से बड़े टुकड़ों के लम्बाई बताओ, जिसमें दोनों रिबन पूरा-पूरा काटा जा सके।
- 80 और 90 को पूरा-पूरा विभाजित करने वाली सबसे बड़ी संख्या बताओ।
- एक आलमारी में कुछ पुस्तकें रखी हुई हैं। इनको 10, 15 और 24 के समूह में रखने पर पूरे-पूरे समूह बन जाते हैं। आलमारी में कम से कम कितनी पुस्तकें हैं ?
- तीन अंकों की छोटी से छोटी संख्या बताओ जो 4, 8 तथा 16 से पूरी-पूरी बँट जाए।
- तीन घंटियाँ क्रमशः 8, 12 और 15 सेकेंड पर बजती हैं। कम से कम कितने सेकेंडों के बाद तीनों घंटियाँ एक साथ बजेंगी।



1. हल करो -

(क) $5435404 + 3387868$ (ख) $2214342 + 8148330$

(ग) $5645320 - 2130978$ (घ) $9633211 - 8958478$

(क) 407×205 (ख) 82058×28

(ख) $9043407 \div 217$ (क) $981747 \div 301$

2. 1, 2, 3, 6, 8 और 9 से बनने वाली छह अंकों की सबसे बड़ी और सबसे छोटी संख्या बताओ। दोनों संख्याओं का अन्तर कितना होगा ?

3. एक ट्रांजिस्टर का मूल्य 1180 रुपये है। टीव्यू का मूल्य ट्रांजिस्टर से 7180 रुपये अधिक है। एक ट्रांजिस्टर और एक टीव्यू सेट का मूल्य कितना होगा ?



4. 214368 में कितना जोड़ें कि योगफल पचास लाख हो जाए ?

5. दो संख्याओं का गुणनफल 1425 है। एक संख्या 25 है, दूसरी संख्या होगी -

(क) 1450 (ख) 1400 (ग) 57 (घ) 35625

6. गुणा के एक प्रश्न को हल करने के बाद सुजाता ने बताया कि इसका गुणक 999 और गुणनफल 744255 है। गुण्य कितना होगा ?

7. एक किसान को यहाँ 5775 किग्रा चावल है। एक बोरे में 105 किग्रा चावल भरा जाता है तो कुल चावल रखने के लिए उसे कितने बोरे की आवश्यकता होगी ?

8. एक गाँव के विकास के लिए एक लाख रुपये मिले। 88805 रुपये विकास कार्यों में खर्च करने के बाद बचे धन को वृक्षान पीठित 8 परिवारों में बराबर-बराबर बाँट दिया गया। हर परिवार को कितने रुपये मिले ?



9. शान्ति की मासिक आय 3500 रुपये है। वह 2800 रुपये घर के खर्चों के लिए रखकर शेष धन डाकखाने में जमा कर देती है। शान्ति ने 2 वर्ष में कितने रुपये डाकखाने में जमा किये ?
10. एक कारखाने में 1 वर्ष में 240000 एलईडी बल्ब बने। यदि प्रत्येक माह में बने वाले बल्बों की संख्या समान हो तो एक माह में कितने बल्ब बनेंगे ?
11. 1800 मिनट से कितने घंटे होंगे ?
12. गुणनखण्ड विधि से मउसो ज्ञात करो -
(क) 18 और 24 (ख) 4, 8 और 12
(ग) 3, 7 और 9 (घ) 14, 21 और 35
13. लघुगुण बताओ -
(क) 3 और 5 (ख) 8 और 25
(ग) 15, 25 और 30 (घ) 5, 15 और 25
14. वह छोटी से छोटी संख्या बताओ जो 2, 3 और 5 से पूरी-पूरी विभाजित हो जाए।
15. वह बड़ी से बड़ी संख्या बताओ जिससे 15, 30 और 45 को पूरा-पूरा बाँटा जा सके।
16. वह बड़े से बड़ा बर्तन किस नाप का होगा जिससे 8, 8 और 10 लीटर दूध पूरा-पूरा नापा जा सके ?
17. कुछ फूल 54, 48 और 40 की ढेरियों में पूरे-पूरे रखे जा सकते हैं। बताओ कम से कम कितने फूल हैं ?

