

इकाई 8 कोण



- कोण की अवधारणा
- कोण की माप
- कोण के प्रकार
- पटरी परकार की सहायता से 60° और 120° कोणों की रचना

8.1 भूमिका :

आपने पिछली कक्षा में दिशाओं के विषय में पढ़ा होगा। आप भली प्रकार से जानते हैं कि सूर्य पूर्व में उदय होता है। यदि हम पूर्व की ओर मुख करके खड़े होते हैं तो हाथ की दिशा को उत्तर और दाहिने हाथ की ओर पड़ने वाली दिशा को दक्षिण कहते हैं। हाथ की दिशा को उत्तर और दाहिने हाथ की ओर पड़ने वाली दिशा को दक्षिण कहते हैं। कुल चार दिशाएँ पूर्व (East), पश्चिम (West), उत्तर (North) और दक्षिण (South) होती हैं। आप अवश्य जानते हैं कि पूर्व-पश्चिम और उत्तर-दक्षिण एक दूसरे के विपरीत दिशा में होते हैं। आइए हम इस ज्ञान का प्रयोग कोण तथा इसके कुछ गुणों को सीखने में करें।

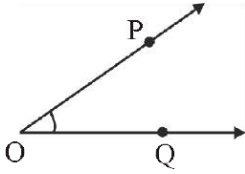
कोण की अवधारणा



चित्र (1) में, आप देख सकते हैं कि खुली हुई पुस्तक के किनारे AB और AC एक दूसरे पर झुके हुए हैं। जो कोण का आभास कराते हैं। इसी प्रकार, चित्र (2) में, दरवाजे का किनारा (Edge) PQ तथा चौखट PR के बीच का झुकाव भी एक कोण का आभास देता है।

इन्हें कीजिए

मचिस की दो तीलियों को लें और पहली तीली के एक सिरे को दूसरी तीली के एक सिरे से चित्र की भाँति जोड़ें।

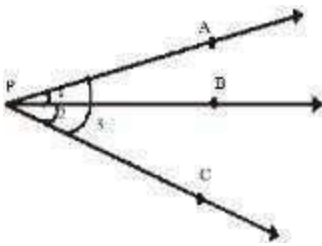


दो तीलियों OP और OQ को दो किरणों \vec{OP} और \vec{OQ} के रूप में कल्पना की जा सकती है। इन दोनों किरणों में O एक उभयनिष्ठअन्त्य बिन्दु (या प्रारम्भिक बिन्दु) है। ये दोनों किरणें एक कोण बना रही हैं।

उभयनिष्ठ प्रारम्भिक बिन्दु वाली दो किरणों से एक कोण बनता है। कोण को बनाने वाली दोनों किरणें उसकी भुजाएँ (Sides) कहलाती हैं।

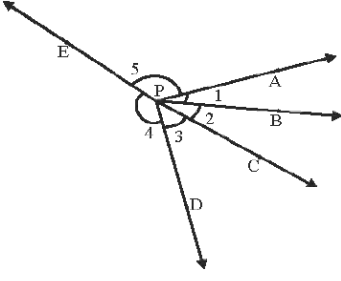
उपर्युक्त आकृति में किरण \vec{OP} और \vec{OQ} से बने एक कोण को दर्शाया गया है। O इस कोण का शीर्ष है। कोण को दर्शाने के लिए शीर्ष O पर एक वक्र का प्रयोग करते हैं। इसे व्यक्त करते हैं।

तर्क कीजिए एवं चर्चा कीजिए



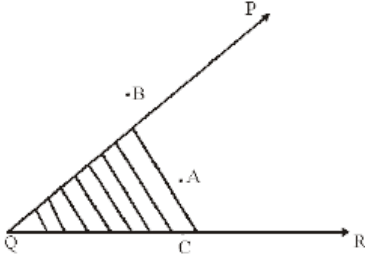
संलग्न चित्र को देखिए, क्या हम बिन्दु P पर बने सभी कोणों को $\angle P$ कह सकते हैं? हम यहाँ देखते हैं कि $\angle P$ को $\angle 1 = \angle APB$, $\angle 2 = \angle CPB$ एवं $\angle 3 = \angle APC$ के लिए प्रयोग कर सकते हैं। पर प्रत्येक कोण परस्पर भिन्न हैं। इसलिए एक बिन्दु पर जब कई कोण बनते हैं तो कोण को लिखते समय उनके शीर्ष के अक्षर को सदैव बीच में लिखते हैं।

प्रयास कीजिए



चित्र में संख्याएं 1, 2, 3, 4, और 5 के नाम लिखिए

8.2 कोण के अभ्यन्तर और बहिर्भाग

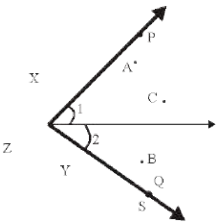


पार्श्व कोण PQR को देखिए। यह कोण तल को दो भागों में विभाजित करता है। एक भाग में कोण के सभी आन्तरिक बिन्दु जैसे A स्थित है। तल के इस भाग को कोण का अभ्यन्तर भाग कहते हैं।

तल का वह भाग जिसमें कोण के बाहर के बिन्दु जैसे B स्थित है, कोण का बाह्य बहिर्भाग कहलाता है। बिन्दु C कोण PQR के भुजा पर स्थित है। अतः कोण से संबन्धित तीन क्षेत्र होते हैं।

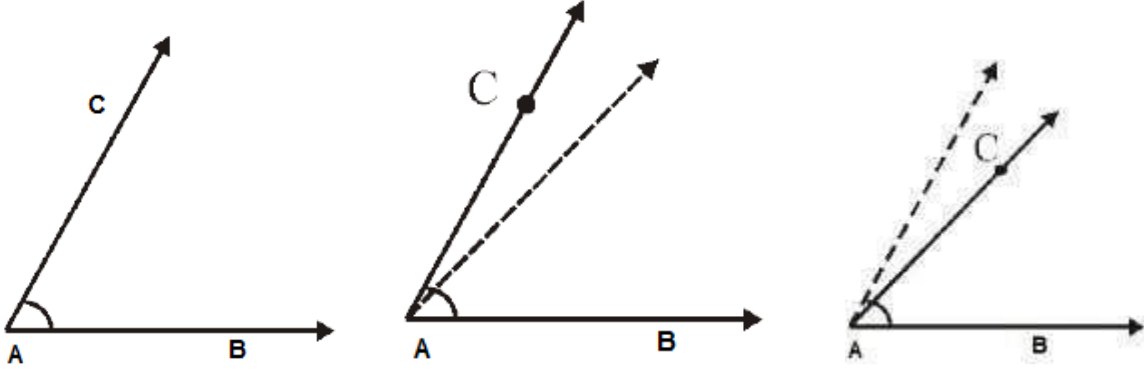
प्रयास कीजिए

पाश्चाकित चित्र में क्रमशः $\angle 1$ और $\angle 2$ के अभ्यन्तर और बहिर्भाग के बिन्दुओं को लिखिए



8.3 कोण की माप (अंश में)

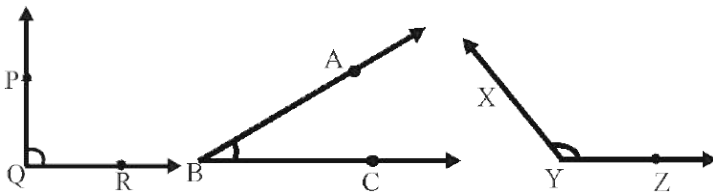
कल्पना कीजिए कि \vec{AB} एक ऐसी किरण है जिसका प्रारम्भिक बिन्दु A है और यह किरण बिन्दु A के परितः घूम सकती है। यदि इसे घुमाकर \vec{AC} स्थिति में लाएँ तो हम देखते हैं कि दोनों स्थितियों के बीच एक कोण बनता है जिसका शीर्ष A और भुजाएँ \vec{AB} और \vec{AC} हैं। यदि हम पुनः \vec{AC} को घुमा कर घटाएँ या बढ़ायें तो चित्र की निम्नांकित स्थितियाँ बनती हैं।



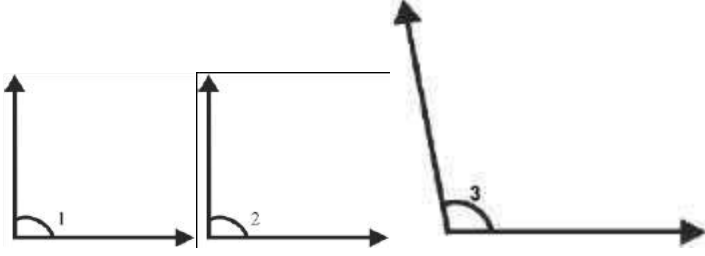
इस प्रकार हम देखते हैं कि दोनों भुजाओं के बीच के झुकाव को आवश्यकतानुसार कम या अधिक किया जा सकता है। इन कोणों के झुकाव की माप को कोणों की माप कहते हैं।

कोणों की तुलना

यदि हम दो या अधिक कोणों की परस्पर तुलना करते हैं तो देखते हैं कि जब उनके मापों में अधिक अन्तर होता है, तो उनमें स्पष्ट रूप से छोटे और बड़े कोणों की पहचान कर लेते हैं। उदाहरणार्थ निम्नांकित चित्रों में यह स्पष्टतः दिखाई देता है कि $\angle ABC$ अन्य दोनों कोणों $\angle PQR$ और $\angle XYZ$ से छोटा है और $\angle PQR$; $\angle ABC$ से बड़ा किन्तु $\angle XYZ$ से छोटा है।

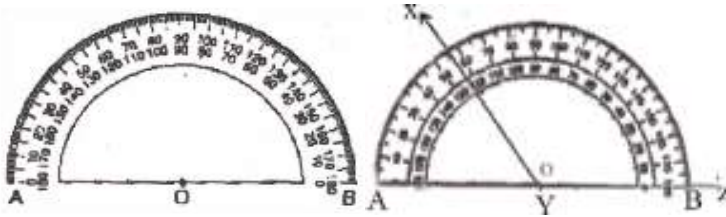


पुनः निम्नांकित चित्रों को देखें।



चित्र में $\angle 1$, $\angle 2$ और $\angle 3$ को देखें। क्या इन्हें देखकर बताया जा सकता है कि कौन कोण बड़ा है और कौन कोण छोटा है ? यहाँ हम देखते हैं कि इन तीनों कोणों के झुकाव का अन्तर बहुत कम है जिसे देखकर नहीं बताया जा सकता है कि कौन कोण छोटा और कौन कोण बड़ा है। इसलिए कोणों का तुलनात्मक अध्ययन अधिक परिशुद्धता से करने के लिए उनको नापना आवश्यक हो जाता है। कोण को नापने के लिए जिस उपकरण का प्रयोग करते हैं उसे चाँदा कहते हैं।

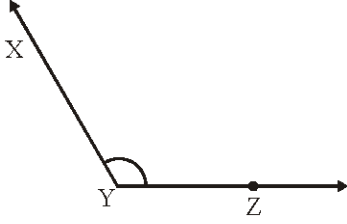
चाँदा



यह एक अर्द्धवृत्ताकार उपकरण है जिससे किसी कोण को मापते हैं। इनके वक्रिय किनारे (edge) को 180 बराबर भागों में विभाजित किया गया है। प्रत्येक भाग एक अंश (degree) कहता है। इस पर दोनों दिशाओं में (वामावर्ती तथा दक्षिणावर्ती) 0° से 180° तक चिह्न लगे होते हैं। जैसा - चित्र से स्पष्ट है, AB आधार और O इसका मध्य बिन्दु है।

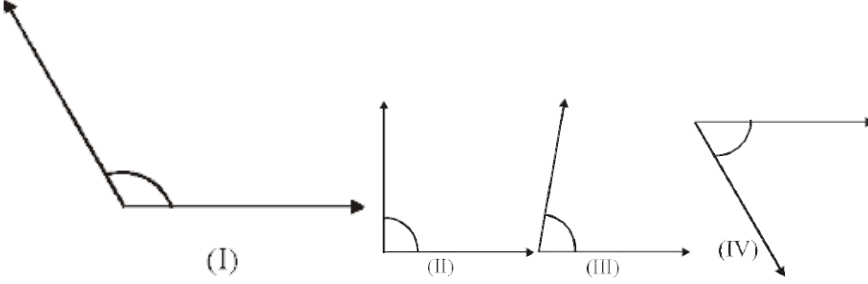
कोण का मापना

आइए, कोण को मापने के तरीके संलग्न कोण द्वारा समझें चाँदे के आधार AB के मध्य बिन्दु O को कोण के शीर्ष बिन्दु Y पर रखकर इस प्रकार समायोजित करें कि किरण YZ पर OB पड़े। चाँदे पर पड़े उस स्केल को पढ़िए जिससे किरण YZ चिह्न 0° से मिल रही है। वक्रिय किनारे पर किरण YX द्वारा दर्शित चिह्न कोण का अंशीय मान होगा। इसे $\angle XYZ = 125^\circ$ लिखते हैं।



प्रयास कीजिए

निम्नांकित कोणों को चाँदे से मापिए ओर उनके नाप लिखिए -



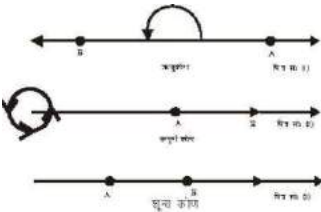
8.4 कोण के माप की इकाई का इतिहास

बेबीलोनिया के लोग सूर्य और चन्द्रमा की गति के विषय में उतनी जानकारी नहीं रखते थे जितनी आज हम लोगों को है। वे इस बात का अनुभव करते रहे कि सूर्य आकाश में एक निश्चित स्थिति में सदैव 360 दिनों बाद आ जाता है। इस पूरे एक चक्कर को उन लोगों ने 360 बराबर भागों में विभक्त किया और प्रत्येक भाग को वर्ष के एक दिन के रूप में लिखा गया। इसी एक भाग को एक अंश (1°) से तथा पूरे एक चक्कर को 360° से व्यक्त करते हैं।

आधा चक्कर 180° होता है। इसे ऋजु कोण भी कहते हैं क्योंकि इस कोण की दोनों भुजाएँ एक रेखा में होती है।

आइए हम कुछ विशिष्ट प्रकार के कोणों को समझें

8.4.1 कोणों के माप का मात्रक (अंश में)



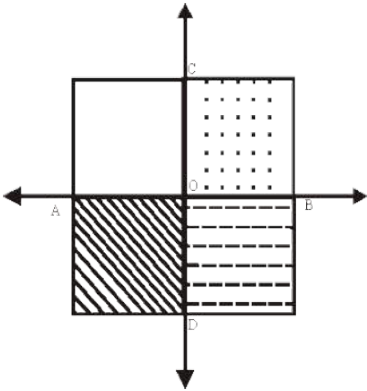
किसी रेखा के किसी बिन्दु O पर दो किरण परस्पर विपरीत दिशा में लीजिए। इस प्रकार रेखा के बिन्दु O पर दो विपरीत किरणों के द्वारा बनाये गये कोण को ऋजु कोण

(Straight angle) कहते हैं, चित्र (1) ।

यदि कोई किरण अपने प्रारम्भिक बिन्दु के प्रति एक बार पूरा घुमाने के बाद अपनी प्रारम्भिक स्थिति में सम्पाती हो जाय तो इस प्रकार बने कोण को सम्पूर्ण कोण (Complete angle) कहते हैं, चित्र (2) ।

यदि किरण को घुमाए बिना इनकी प्रारम्भिक और आन्तिम स्थितियाँ सम्पाती हों, तो इस प्रकार बने कोण को शून्य कोण (Zero angle) कहते हैं, चित्र (3) ।

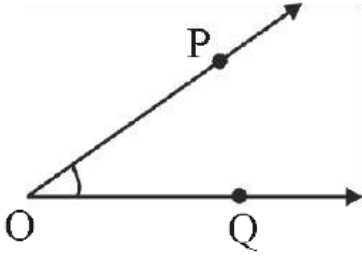
- आयताकार या वर्गाकार कागज पर चित्रानुसार एक रेखा \overleftrightarrow{AB} लीजिए। इसे ABके अनुगत मोड़ दीजिए। पुनः इस कागज को इस प्रकार मोड़िए कि रेखाABका एक भाग दूसरे भाग पर आ जाय। कागज के दूसरे मोड़ को CD से दर्शाइए। हम देखते हैं कि कागज के मोड़ों का उभयनिष्ठ बिन्दु O है। अब बिन्दु O पर चार कोण $\angle BOC$, $\angle COA$, $\angle AOD$ तथा $\angle DOB$ बनते हैं। अक्सी (पारदर्शक) कागज से इन चारों कोणों को नापिए। हम देखेंगे कि ये चारों कोण परस्पर बराबर हैं। इनमें से प्रत्येक कोण को हम समकोण (Right angle) कहते हैं।



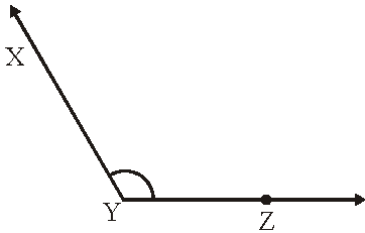
8.5 कोणों के प्रकार

हम समकोण, ऋजु कोण, सम्पूर्ण कोण तथा शून्य कोण के विषय में अध्ययन कर चुके हैं। अब हम कुछ अन्य प्रकार के कोणों के बारे में अध्ययन करेंगे।

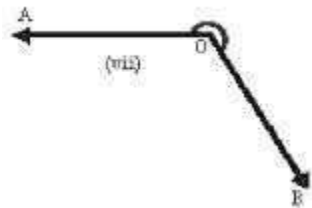
न्यून कोण: पार्श्व चित्र (1) देखिए। यह कोण जो शून्य कोण से बड़ा किन्तु एक समकोण से छोटा होता है, न्यूनकोण (Acute angle) कहलाता है। अर्थात् $90^\circ > \text{न्यूनकोण} > 0^\circ$



अधिक कोण: पार्श्व चित्र (2) देखिए। वह कोण जो एक समकोण से बड़ा किन्तु एक ऋजु कोण से छोटा होता है, अधिक कोण (Obtuse angle) कहलाता है। अर्थात् $180^\circ >$ अधिक कोण $> 90^\circ$

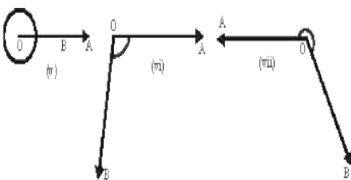
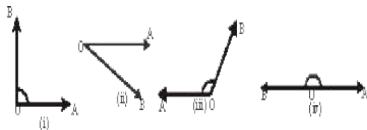


वृहत् कोण: पार्श्व चित्र (3) देखिए। वह कोण जो एक ऋजु कोण से बड़ा किन्तु सम्पूर्ण कोण से छोटा होता है, वृहत् कोण (Reflex angle) कहलाता है। अर्थात् $360^\circ >$ वृहत् कोण $> 180^\circ$



प्रयास कीजिए

निम्नांकित आकृतियों को देखिए और कोण के प्रकार को लिखिए।



- 280° का कोण किस प्रकार का कोण है?
- एक न्यूनकोण बनाइए। नापकर इसकी नाप लिखिए।
- एक अधिक कोण बनाइए। इसे नापिए और बताइए कि यह कोण, ऋजुकोण से कितना छोटा है?
- निम्नांकित कोणों में न्यूनकोण, अधिककोण और वृहत्कोण छाँटकर अपनी अभ्यास पुस्तिका में लिखिए।

$210^\circ, 147^\circ, 10^\circ, 300^\circ, 54^\circ, 178^\circ, 91^\circ$

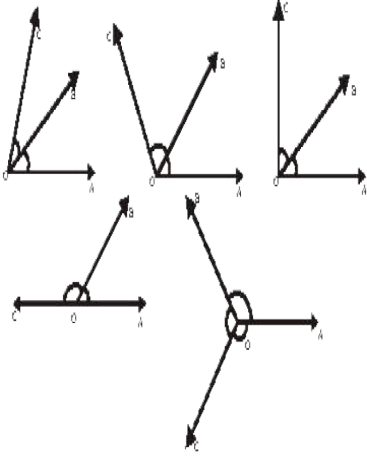
इसे भी कीजिए

क्रियाकलाप

1. अपनी भुजा के ऊपरी और निचले भाग का प्रयोग करते हुए कोहनी (elbow) पर न्यूनकोण, समकोण और अधिककोण बनाइए।
2. दो आसन्न अंगुलियों के कोण बनाइए। कितने प्रकार के कोण बनाये जा सकते हैं?
3. यदि हम प्रातः काल सूर्य की ओर मुख करके खड़े हों तो किस दिशा में मुख हो जाएगा, यदि दाहिनी ओर (i) एक समकोण पर घूम जायें (ii) दो समकोण पर घूम जायें (iii) तीन समकोण पर घूम जायें (iv) चार समकोण पर घूम जायें।
4. एक घड़ी लीजिए जिसमें घंटा और मिनट की सूइयाँ हों। घड़ी में तीन, छह, नौ और बारह बजाइए। प्रत्येक दशा में देखिए इनके बीच कितने अंश का कोण बनता है?
5. केवल पटरी और पेंसिल लीजिए तथा इसकी सहायता से न्यूनकोण, समकोण, अधिककोण, ऋजुकोण, वृहत् कोण और सम्पूर्ण कोण खींचिए।

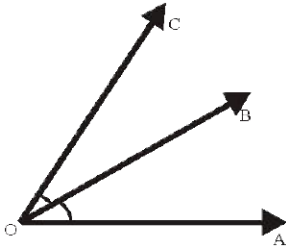
कोण-युग्म

इन आकृतियों को देखिए :

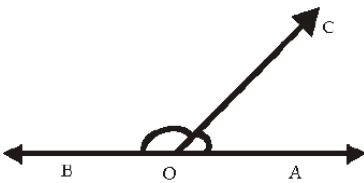


हम देखते हैं कि प्रत्येक कोण में कोणों का एक उभयनिष्ठ शीर्ष है। उभयनिष्ठ शीर्ष पर भिन्न-भिन्न प्रकार के कोणों के जोड़े बन रहे हैं। इन कोणों के जोड़े को युग्म कहते हैं। इन भिन्न-भिन्न स्थितियों से बने कोण-युग्मों के विषय में अब हम अध्ययन करेंगे।

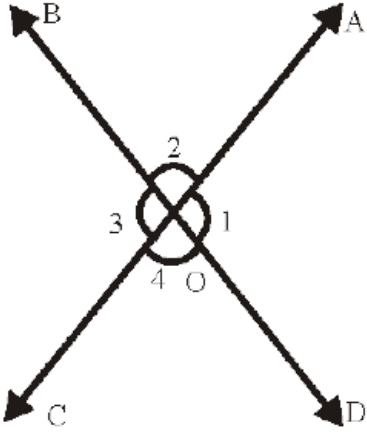
आसन्न कोण: पार्श्व चित्र को देखिए। इसमें दो कोण AOB और कोण BOC हैं जिनका एक ही उभयनिष्ठ शीर्ष O तथा भुजा OB उभयनिष्ठ है। अतः ऐसे कोण-युग्म को, जिनका एक उभयनिष्ठ शीर्ष हो और उनकी उभयनिष्ठ भुजा के विपरीत ओर भुजायें OA और OC स्थित हों, आसन्न कोण या संलग्न कोण (Adjacent angles) कहते हैं।



रैखिक युग्म : पार्श्व चित्र को देखिए। यहाँपर कोण AOC और कोण COB आसन्न कोण हैं। O उभयनिष्ठ शीर्ष तथा OC उभयनिष्ठ भुजा है। भुजाएँ OA तथा OB विपरीत किरणें हैं। आसन्न कोण के ऐसे युग्म को रैखिक युग्म (Linear Pair) कहते हैं। ऐसे रैखिक युग्म कोणों का योग दो समकोण होता है।



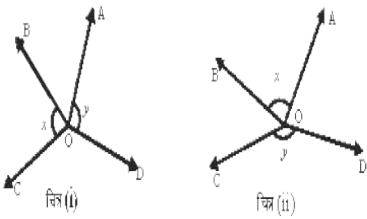
शीर्षाभिमुख कोण: पार्श्व चित्र में दो रेखाएँ AC और BD एक दूसरे को बिन्दु O पर प्रतिच्छेदित करती हैं। जिससे बिन्दु O पर चार कोण बनते हैं।



चित्र को देखकर बताइए कि कौन-कौन रैखिक-युग्म हैं ? हम देखते हैं कि कोण युग्म $\angle 1$ और $\angle 2$; तथा $\angle 2$ और $\angle 3$; $\angle 3$ और $\angle 4$; तथा $\angle 4$ और $\angle 1$ रैखिक-युग्म हैं। चित्र में पुनः देखकर बताइए कि कौन-कौन से कोण, रैखिक-युग्म नहीं हैं। हम देखते हैं कि कोणयुग्म $\angle 1$ और $\angle 3$ तथा $\angle 2$ और $\angle 4$ रैखिक- युग्म नहीं है। अतः जब दो रेखाएँ एक दूसरे को प्रतिच्छेदित करती हों तब इनमें बने इन दो कोणों को, जिनमें कोई भुजा उभयनिष्ठ न हो, शीर्षाभिमुख कोण (Vertically opposite angles) कहते हैं। इस प्रकार $\angle 1$ और $\angle 3$ तथा $\angle 2$ और $\angle 4$ शीर्षाभिमुख कोण हैं।

निम्नांकित चित्रों को देखकर अपनी अभ्यास पुस्तिका पर ऐसे ही कोण खींचिए।

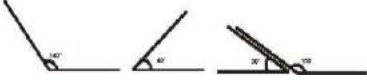
- (1) बताइए चित्र (i) में क्या कोण x तथा कोण y शीर्षाभिमुख हैं ?
- (2) बताइए चित्र (ii) में क्या कोण x तथा कोण y शीर्षाभिमुख हैं ?



कोटिपूरक कोण: निम्नांकित आकृतियों को देखिए। यदि दो कोणों का योगफल 90° हो तो ऐसे कोणों को एक दूसरे का कोटिपूरक कोण अथवा पूरक कोण (Complementary Angles) कहते हैं। जैसे 40° , 50° एवं 30° , 60° आदि।

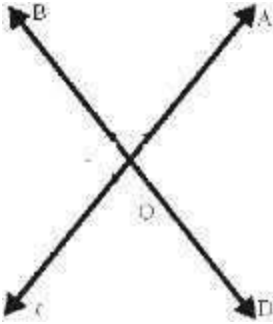


सम्पूरक कोण: निम्नांकित आकृतियों को देखिए। यदि दो कोणों का योगफल 180° हो, तो ऐसे कोणों को एक दूसरे का संपूरक कोण (Supplementary Angles) कहते हैं। जैसे 40° , 140° या 30° , 150° आदि। अतः यह स्पष्ट है कि कोटिपूरक और संपूरक कोणों के शीर्ष का उभयनिष्ठ तथा आसन्न कोण होना आवश्यक नहीं है।



प्रयास कीजिए

- निम्नांकित कोणों में से प्रत्येक कोण का कोटिपूरक कोण लिखिए।
(i) 20° (ii) 55° (iii) 68°
- निम्नांकित कोणों में से प्रत्येक कोण का संपूरक कोण लिखिए।
(i) 45° (ii) 70° (iii) 120°
- निम्नांकित कोण- युग्मों में कौन पूरक और कौन संपूरक हैं ?
(i) 48° , 42° (ii) 135° , 45°
(iii) 160° , 20°
- पार्श्व चित्र में रैखिक- युग्म और शीर्षाभिमुख कोण के नाम बताइए।



8.5 विभिन्न माप के कोणों की रचना

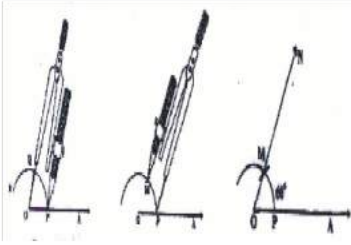
8.5.1. 60° के कोण की रचना:

- अपनी अभ्यास पुस्तिका पर एक किरण OA खींचिए। अब परकार के नुकीले सिरे को किरण के प्रारम्भिक O बिन्दु पर रखकर किसी दूरी से एक वृत्ताकार आकृति PQR बनाइए। यह वृत्ताकार आकृति किरण OA को P पर काटती है। स्थिति (i)।
- दूरी OP को लेकर परकार के नुकीले सिरे को बिन्दु P पर रखिए और वृत्ताकार आकृति (चाप)PQR में इतनी ही दूरी से पेंसिल वाले सिरे से बिन्दु चिह्नित कीजिए। यह

बिन्दु M है। स्थिति (ii)

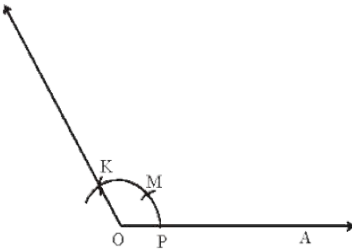
(iii) अब OM को मिला दीजिए। OM को उसी सीध में आगे बढ़ाया। इसी किरण पर एक बिन्दु N ले। इस प्रकार बने कोण AON को चाँदा से मापकर देखिए। यह कोण 60° का होगा। स्थिति (iii)

किसी किरण OA के प्रारम्भिक बिन्दु O पर परकार के नुकीले सिरे को रखकर किसी दूरी से एक वृत्ताकार आकृति खींचिए जो किरण से P पर मिलती है। पुनः P से उतनी ही दूरी वृत्ताकार आकृति पर चिह्नित की जाए। तब इस चिह्नित बिन्दु और प्रारम्भिक बिन्दु को मिलाने से किरण OA के साथ बना हुआ कोण 60° का होगा।



8.5.2 120° कोण की रचना :

अपनी अभ्यास पुस्तिका पर एक किरण OA खींचिए। परकार के नुकीले भाग को प्रारम्भिक बिन्दु O पर रखकर एक वृत्ताकार आकृति (चाप) खींचिए जो किरण को P पर मिलती है। P से उसी दूरी से बराबर वृत्ताकार आकृति पर बिन्दु M चिह्नित कीजिए। अब परकार का नुकीला सिरा बिन्दु M पर रखकर उसी दूरी ($OM=PM$) के बराबर एक और बिन्दु K चिह्नित कीजिए। प्रारम्भिक बिन्दु O को K से मिलाइए। कोण AOK को चाँदा से मापिए। यह कोण 120° का होगा। इसी प्रकार 60° के अपवर्त्य 180° , 240° आदि कोणों की रचना की जा सकती है।



निम्नलिखित बिन्दुओं पर सामूहिक चर्चा कीजिए और निष्कर्ष निकालिए :

(i) क्या दो अधिक कोण संपूरक कोण हो सकते हैं ?

(ii) क्या दो समकोण संपूरक कोण हो सकते हैं ?

- (iii) क्या दो न्यून कोण संपूरक कोण हो सकते हैं ?
- (iv) क्या दो न्यून कोण रैखिक युग्म बना सकते हैं ?
- (v) क्या रैखिक युग्म के दोनों कोण अधिक कोण हो सकते हैं ?

दक्षता अभ्यास 8

1. यदि साइकिल के पहिए में 36 तीलियाँ हों, तो दो आसन्न तीलियों के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

2. कोण 60° , 120° , 240° , 300° सम्पूर्ण कोण के कौन से भाग हैं?

3. ज्ञात कीजिए:

$$\frac{1}{9}$$

- (i) एक समकोण का $\frac{1}{9}$ वाँ भाग (ii) एक समकोण का 30%
- (iii) एक ऋजु कोण का 50% (iv) एक सम्पूर्ण कोण का 60%

4. व्यायाम करते समय जब छात्र को निदर्शित किया जाता है :

- (i) पीछे मुड़, वह कितने अंश से घूम जाता है ?
- (ii) दायें घूम, तो वह कितने अंश से घूम जाता है ?

5. निम्नांकित कोणों को उनके परिमाण के आधार पर वर्गीकृत कीजिए:

0° , 30° , 90° , 135° , 180° , 225° , 360°

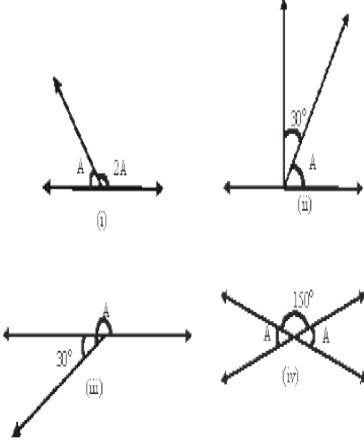
6. निम्नांकित का उत्तर लिखिए:

- (i) न्यूनकोण का कोटिपूरक कोणकोण होता है।
- (ii) न्यून कोण का संपूरक कोण.....कोण होता है।
- (iii) एक समकोण का संपूरक कोणकोण होता है।
- (iv) अधिक कोण का संपूरक कोण.....कोण होता है।

7. निम्नांकित कोण समकोण तथा ऋजुकोण का कौन सा अंश है ?

- (i) 30° (ii) 60°
- (iii) 120° (iv) 150°

8. निम्नांकित चित्रों में कोण A की गणना कीजिए।



9. एक सम्पूर्ण कोण को 60° के कितने अपवत्यां में विभक्त कर सकते हैं। इसका सत्यापन पटरी, परकार से कीजिये।

10. पटरी और परकार की सहायता से 300° का कोण खींचिए।

इस इकाई में हमने सीखा

1. कोण किसे कहते हैं ? कोण कितने प्रकार के होते हैं ?
2. पूरक कोण और सम्पूरक कोण, आसन्न कोण, शीर्षाभिमुख कोण, रैखिक युग्म इत्यदि के तात्पर्य एवं पारस्परिक सम्बन्ध।
3. पटरी और परकार से विभिन्न मापों के कोणों की रचना करना।

उत्तरमाला

दक्षता अभ्यास 8

1. 10°
2. $1/6, 1/3, 2/3, 5/6$
3. (i) 10° , (ii) 27° , (iii) 90° , (iv) 216° ,
4. (i) 180° , (ii) 90° , 5. शून्य कोण, न्यून कोण, समकोण, अधिक कोण, ऋजु कोण, बृहद कोण, सम्पूर्ण कोण; 6. (i) न्यून कोण (ii) अधिक कोण (iii) एक समकोण (iv) न्यूनकोण; 7. (i) $1/3, 1/6$, (ii) $2/3, 1/3$, (iii) $4/3, 2/3$, (iv) $5/3, 5/6$, 8. (i) 60° , (ii) 60° , (iii) 210° , (iv) 30° , 9 छह