परिशिष्ट : भारतीय प्राचीन गणितीय पद्धति

AQ1K3A

- गणितज्ञ श्रीनिवास रामानुजन
- विनिकुलम, विनिकुलम से साधारण संख्या में बदलना
- घटाना, सूत्र परावर्त्य योजयेत्
- बीजीय व्यंजको को जोड़ना एवं घटाना, मिश्रित गणनाएँ
- विभाजनीयता के नियम (3, 7, 9 की विभाजनीयता की जानकारी)
- गुणा निखलम सूत्र, आधार, उपाधार की जानकारी देना
- पहाड़ा पढ़ाना

भारतीय गणित की प्राचीन काल से ही अत्यन्त उज्ज्वल परम्परा रही है। इस परम्परा को चार चाँद लगाने वाले अनेक मनीषी रहे हैं, जिनके अनवरत प्रयास से शून्य का आविष्कार भारत में ही हुआ है और पुनः दाशमिक संख्या पद्धति का विकास, उसके फलस्वरूप छोटी-बड़ी संख्याओं को लिखना, बोलना और पढ़ना सम्भव हो सका तथा गणना की चार मौलिक संक्रियाओं जोड़ना, घटाना, गुणा करना और भाग करने का अस्तित्व में आना एक सार्वभौमिक इतिहास बन सका। फलस्वरूप अनेक प्रश्नों को हल करना सम्भव हो सका। इसी उज्ज्वल परम्परा में स्वामी श्री भारती कृष्ण तीर्थ जी महाराज, जो गोवर्धनपीठ के शंकराचार्य रहे हैं, उन्होंने गणित पर गहन शोध में अत्यन्त सराहनीय कार्य किया है तथा उन्होंने इस पर एक श्रेष्ठ 'वैदिक गणित' की रचना की जिसमें कुल 40 अध्याय हैं तथा इसमें गुणन, भाग, खण्डीकरण, समीकरण, फलन इत्यादि को सरलतम प्रक्रिया से हल करने के नियम एवं विधियाँ दी हुई हैं जो वैदिक गणित के 16 सूत्रों तथा 13 उपसूत्रों (उपप्रमेयों) पर आधारित हैं। सूत्रों के अनुप्रयोग से कुछ कठिन प्रश्न भी अत्यन्त सरलता से हल हो जाते हैं।

17.1 श्री निवास रामानुजन

महान् भारतीय गणितज्ञ श्री निवास रामानुजन का जन्म 22 दिसम्बर 1887 को ईरोड (तमिलनाडु) में एक श्री वैष्णव ब्राह्मण परिवार में हुआ। बचपन से ही इनकी अद्भुत विलक्षण प्रतिभा गणित के क्षेत्र में देखी गयी। यह एक अद्भुत साम्य है कि प्राचीन भारतीय गणितज्ञों की भाँति रामानुजन भी सीधे सूत्र प्रस्तुत कर देते थे। इनकी प्रतिभा से प्रभावित होकर कैम्ब्रिज विश्वविद्यालय के प्रो. जी.एच.हार्डी ने इनको वहाँ आने की सारी औपचारिकताएँ तथा धन आदि की व्यवस्था पूरी की। 17 मार्च 1914 को रामानुजन लन्दन के लिए रवाना हुए और वहाँ 27 फरवरी 1919 तक रहे। वहाँ पर ये प्रो. हार्डी एवं प्रो. लिटिलबुड के साथ कई विषयों पर शोध कार्य करते तथा परस्पर ज्ञान का आदान-प्रदान करते। इनके ज्ञान की महानता के कारण 28 फरवरी 1918 को मात्र 30 वर्ष की आयु में ये एफ.आर.एस. (F.R.S.) हो गये तथा 13 अक्टूबर 1918 को ट्रिनिट कालेज, कैम्ब्रिज के फेलो से सम्मानित हुए। जनवरी 1919 में इन्हें इण्डियन मैथेमेटिकल सोसाइटी (जो उन दिनों इंगलैण्ड में थी) द्वारा भी सम्मानित किया

गया। प्रो. हार्डी ने रामानुजन की तुलना यूरोप के महान गणितज्ञों आयलर (1707-83), गौस (1777-1855) और याकोबी (1805-51) के साथ की है।

गणित के इतिहासकार हर्बर्ट तर्नबुल ने लिखा है "रामनुजन की गवेषणाओं से एक नये युग का सूत्रपात हुआ।"

इनकी अद्भुत प्रतिभा के दर्शन उस समय भी हुआ जब बीमारी की अवस्था में अस्पताल में इन्हें देखने डॉ. हार्डी गये। संयोगवश जिस टैक्सी से प्रो. हार्डी गये थे, उसका नम्बर 1729 था। डॉ. हार्डी ने दुःखी स्वर में कहा कि जिस टैक्सी से वे यहाँ आये हैं, उसका नम्बर बड़ा अशुभ है, क्योंकि उसका एक गुणनखण्ड 13 है। तुरन्त रामानुजन ने लेटे-लेटे ही उत्तर दिया कि यह तो एक सबसे छोटी संख्या है जिसे दो प्रकार से दो घन संख्याओं के योग के रूप में व्यक्त कर सकते हैं, यथा $1729 = 10^3 + 9^3$ तथा $12^3 + 1^3 = 1729$; इसे सुनकर डॉ. हार्डी चकित हो गये।

संख्याओं के ऊपर उनके शोध कार्य हैं तथा उपर्युक्त खोज तो वे तभी कर सके थे जब वे मैट्रिक के छात्र थे।

ऐसे महान् गणितज्ञ एवं सरस्वतीपुत्र का देहावसान मात्र 32 वर्ष की अल्पायु में दिनांक 26 अप्रैल 1920 को हो गया तथा इनकी मृत्यु के लगभग 37 वर्ष बाद इनकी तीन नोट बुकों की फोटोकापी का प्रथम संस्करण दो बड़ी जिल्दों में टाटा इंस्टीट्यूट ऑफ फण्डामेंटल रिसर्च, मुम्बई द्वारा प्रकाशित किया गया। इसमें इनके द्वारा खोज किये गये 4000 सूत्रों एवं प्रमेयों का संकलन है जिस पर आज विश्वभर के गणितज्ञ खोजबीन में जुटे हुए हैं।

इनकी प्रतिभा का एक उदाहरण है इन्होंने वृत्त की परिधि एवं व्यास के अनुपात (π) के अधिक से अधिक शुद्ध मान प्राप्त करने के लिए जो सूत्र प्रस्तुत किये हुए हैं, उसके आधार पर आज सुपर कम्प्यूटर (π) का शुद्धमान दशमलव के लाखों स्थानों तक प्रस्तुत करने में सक्षम हो रहे हैं।

रामानुजन की नोटबुकों की यह भव्य विरासत देश-विदेश के अनेक शोधकर्ताओं और गणितज्ञों के लिए आगे आने वाले अनेक दशकों तक शोध का विषय रहेंगी तथा उन्हें "गणितज्ञों का गणितज्ञ" कहना कोई अतिशयोक्ति नहीं है।

रामानुजन के जन्म से लगभग पौने चार वर्ष पूर्व भारतीय गणित की गौरवशाली परम्परा में जिस एक अन्य महान भारतीय गणितज्ञ का जन्म हुआ, वही हैं महान् स्वामी श्री भारती कृष्ण तीर्थ जी महाराज जिन्होंने वैदिक गणित के 16 सूत्रों एकाधिकेन पूर्वेण, निखिलं नवतः चरमं दशतः, ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम्, परावर्त्य योजयेत् आदि को प्रस्तुत किया जिसके आधार पर परिकलन कार्य अत्यन्त सरल, सुगम्य और संक्षिप्त हो सका है। उन्होंने संख्या पद्धति में कुछ नये आयाम जोड़े हैं। आगे हम उनकी चर्चा तथा गणित में उनके अनुप्रयोग के लाभ को देखेंगे। सर्वप्रथम हम "विनकुलम" को समझने का प्रयास करते हैं।

17.2 विनकुलम

सामान्यतः हम संख्याओं को लिखने में जिन अंकों का प्रयोग करते हैं, वे सभी धनात्मक होते हैं किन्तु वैदिक गणित में ऋणात्मक अंकों का भी प्रयोग करते हैं जिनको व्यक्त करने के लिए इनके ऊपर (−) का चिह्न लगाते हैं, यथा ;

$\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}$

संख्याएँ लिखने में जिस स्थान पर ये अंक होते हैं, वहाँ इनका स्थानीयमान ऋणात्मक समझा जाता है, जैसे $9\bar{1}$ का अर्थ है 90 −1

इसी प्रकार

$$
\begin{aligned}
9\bar{7}\bar{6}2 &= 9\times1000 - 7\times100 - 6\times10 + 2\times1 \\
&= 9000 - 700 - 60 + 2 \\
&= 8242 \\
14\bar{8}\bar{7}\bar{5} &= 1\times10000 + 4\times1000 - 8\times100 - 7\times10 - 5\times1 \\
&= 10000 + 4000 - 800 - 70 - 5 \\
&= 14000 - 875 \\
&= 13125, \text{ इत्यादि।}
\end{aligned}
$$

विनकुलम संख्याएँ

जिन संख्याओं को लिखने में ऋणात्मक अंकों अर्थात् विनकुलम का प्रयोग करते हैं, वे ही संख्याएँ "विनकुलम संख्याएँ" कहलाती हैं। हम साधारण संख्याओं को विनकुलम संख्याओं में तथा विनकुलम संख्याओं को साधारण संख्याओं में बदल सकते हैं। सामान्यतः जिन साधारण संख्याओं में प्रयुक्त अंक 5 या 5 से छोटे होते हैं, उन संख्याओं को विनकुलम में बदलना लाभप्रद नहीं होता। 5 से बड़े अंकों वाली साधारण संख्या को विनकुलम संख्या में बदलने से संख्याएँ शून्य से लेकर 5 तक के अंकों में परिवर्तित हो जाती हैं जिससे गणना कार्य सरल हो जाते हैं, जिनका लाभ हम आगे देखेंगे। अब हम उदाहरण के माध्यम इसे समझेंगे।

साधारण संख्याओं को विनकुलम संख्याओं में बदलना

सामान्यतः हम किसी भी साधारण संख्या को विनकुलम संख्या में बदल सकते हैं तथा एक ही संख्या को कई विनकुलम संख्याओं में बदल सकते हैं, जैसे -

(1) 19 $= 20 - 1 = 2\bar{1}$

(2) 79 $= 80 - 1 = 8\bar{1}$

79 $= 100 - 21 = 1\bar{2}\bar{1}$

(3) 863 $= 800 + 60 + 3$

$= 900 - 37$

$= 900 - 30 - 7$

$= 9\bar{3}\bar{7}$

पुनः 863 $= 900 - 40 + 3$

$= 1000 - 100 - 40 + 3$

$= 1\bar{1}\bar{4}3$

863 $= 870 - 7$

$$
\begin{aligned}
863 &= 870 - 7 \\
&= 1000 - 130 - 7 \\
&= 1000 - 137 \\
&= 1000 - 140 + 3 \\
&= 1000 - 100 - 40 + 3 \\
&= 1\,\bar{1}\,\bar{4}\,3
\end{aligned}
$$

अब हम किसी साधारण संख्या में 5 से बड़े अंकों को विनकुलम में बदलकर विनकुलम संख्याएँ बनाने के उदाहरणों से समझेंगे। यथा :

उदाहरण के लिए 1873 को विनकुलम में हम निम्नवत् बदल सकते हैं :

$$1873 = 2\,\bar{1}\,\bar{3}\,3$$

इसी प्रकार, $4678 = 5\,\bar{3}\,\bar{2}\,\bar{2}$

$$6587 = 7\,\bar{4}\,\bar{1}\,\bar{3} = 1\,\bar{3}\,\bar{4}\,\bar{1}\,\bar{3}$$

नियम : यदि संख्या के किसी भी अंक को विनकुलम में बदलते हैं तो उस अंक को 10 में से घटाकर प्राप्त अंक के ऊपर (–) चिह्न लगा देते हैं तथा उस अंक के ठीक बायें वाले अंक में 1 जोड़कर नया अंक प्राप्त कर लिख देते हैं। इसी प्रकार यदि लगातार कई अंकों विनकुलम में बदलते हैं तो सबसे दायें वाले अंक को 10 में से तथा शेष अंकों को 9 में से घटाते हैं तथा अन्तिम अंक जिसे विनकुलम में बदला गया है, उसके ठीक बायें वाले अंक में 1 की वृद्धि कर देते हैं, यथा

$$876873 = 1\bar{1}\bar{2}\bar{3}\,\bar{1}\,\bar{3}3$$

विनकुलम संख्याओं को साधारण संख्याओं में बदलना

विनकुलम संख्याओं को साधारण संख्याओं में बदलने के लिए यदि संख्या में केवल एक अंक विनकुलम है तो उसे 10 में से घटाकर उसके स्थान पर रख देते हैं और उसके ठीक बायें के अंक में 1 की कमी कर लिख देते हैं, जैसे

$$8\bar{3} = 77$$

$$16\bar{7} = 153$$

$3\bar{8}5 = 225$ इत्यादि

अब यदि किसी संख्या में अंकों का कोई समूह ही (अर्थात् एक साथ लगातार कई अंक) विनकुलम हैं तो सबसे दायें विनकुलम वाले अंक को 10 में से घटायेंगे तथा शेष विनकुलम अंकों को 9 में से घटाकर लिखेंगे तथा समूह के सबसे बायें वाले विनकुलम अंक के ठीक बायें वाले अंक से 1 घटाकर लिखेंगे

उदाहरण - $9\,\bar{6}\,\bar{7}\,\bar{8}\,5 = 83225$

$4\,\bar{7}\,\bar{8}\,\bar{6}\,2 = 32142$

$1\,\overline{678}\,1 = 03221$

$= 3221,$

17. 3 घटाना

उदाहरण - 1

$$\begin{array}{r} 58349 \\ -\ 27684 \\ \hline \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5\,8\,3\,4\,9 \\ \bar{2}\,\bar{7}\,\bar{6}\,\bar{8}\,\bar{4} \\ \hline 3\,1\,\bar{3}\,\bar{4}\,5 \\ \hline \end{array}$$

अर्थात 30665 उत्तर

उदाहरण 2 - किसी गाँव में 2013 मतदाता हैं। यदि किसी चुनाव में 1789 मतदाताओं ने अपने मताधिकार का प्रयोग किया तो कितने मतदाताओं ने वोट नहीं दिये।

हल -

$$\begin{array}{r} 2\ 0\ 1\ 3 \\ +\ \bar{1}\ \bar{7}\ \bar{8}\ \bar{9} \\ \hline 1\bar{7}\ \bar{7}\ \bar{6} \\ \hline = 0224 \end{array}$$

अर्थात् 224 मतदाताओं ने वोट नहीं दिये।

विशेष

घटाने का वैदिक सूत्र है :-

''परावर्त्य योजयेत्''

अर्थात् घटायी जाने वाली संख्या का परावर्त्य (योगात्मक प्रतिलोम) को जोड़ते हैं।

किसी संख्या का परावर्त्य ज्ञात करने के लिए उसके सभी अंकों के ऊपर (–) चिह्न लगा दें और फिर प्राप्त संख्या को जोड़ दें। उपर्युक्त उदाहरण (2) में इसी सूत्र का प्रयोग किया गया है।

17.4 बीजीय व्यंजकों को जोड़ना व घटाना, मिश्रित गणनाएँ

वैदिक गणित की दृष्टि से अंकगणित के समान ही बीगणित की भी संरचना है तथा उनके सिद्धान्तों में भी पर्याप्त समानताएँ हैं। इनमें प्रमुख अन्तर बस इतना है कि जहाँ अंकगणित ''व्यक्त'' राशि की बात करती है, वहीं बीजगणित ''अव्यक्त'' राशि की बात करती है। इसी कारण अंकगणित को ''व्यक्त गणित'' और बीजगणित को ''अव्यक्त गणित'' भी कहते हैं।

अंकगणित की दाशमिक संख्या-पद्धति में जहाँ अंकों के स्थानीय मान होते हैं जो आधार 10के दायें से बायें क्रमशः 10^0, 10^1, 10^2, 10^3, ... के रूप में होते हैं, यथा

लाख	दस हजार	हजार	सैकड़ा	दहाई	इकाई
10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0
=100000	=10000	=1000	=100	=10	=1

उपर्युक्त सारणी से स्पष्ट है कि बायें स्थान का मान ठीक दायें वाले स्थान के मान का दस गुना है।

इसी प्रकार बीजगणित के x-आधारित संख्या पद्धति में संख्या में प्रत्येक स्थान का मान x के घात के रूप में निरूपित होता है जो निम्नवत् हैः

पंचम	चतुर्थ	तृतीय	द्वितीय	प्रथम	शून्य	स्थान
x^5	x^4	x^3	x^2	x^1	$x^0=1$	(घातांक के अनुसार)

उपर्युक्त सारणी से स्पष्ट है कि बायें स्थान का मान उसके ठीक दायें वाले स्थान के मान का x गुना होता है। अब ध्यान से देखें कि

जहाँ अंकगणित संख्या पद्धति में $15 = 1\times10^1 + 5\times10^0$

$= 1\times10 + 5 = 10 + 5$

वहीं बीजगणितीय संख्या पद्धति में $15 = 1 \times x^1 + 5 \times x^0 = x + 5$

इसी प्रकार x-आधार पद्धति में

$$465 = 4 \times x^2 + 6 \times x^1 + 5 \times x^0$$

$$= 4x^2 + 6x + 5$$

$$8973 = 8 \times x^3 + 9 \times x^2 + 7 \times x^1 + 3 \times x^0$$

$$= 8x^3 + 9x^2 + 7x + 3$$

विलोमतः बीजगणित के बहुपदीय व्यंजकों को x आधारित संख्या पद्धति की सहायता से आंकिक संख्याओं में परिवर्तित कर सकते हैं, यथा :

बहुपदीय व्यंजक	x-आधार वाली संख्याएँ				आंकिक संख्याएँ
	तृतीय	द्वितीय	प्रथम	शून्य	
	x^3	x^2	x^1	x^0	
$3x + 7$			3	7	3 7
$5x^2 + 7x + 2$		5	7	2	5 7 2
$6x^3 + 5x + 9$	6	0	5	9	6 0 5 9
$2x^3 + 8$	2	0	0	8	2 0 0 8

उपर्युक्त से यह स्पष्ट है कि x आधारित संख्या पद्धति का प्रयोग कर बीजगणित के बहुपदीय व्यंजकों को अंकों में व्यक्त कर सकते हैं। अतः बीजगणित की समस्त संक्रियाएँ भी अंकगणित की भाँति की जा सकती हैं। सर्वप्रथम हम जोड़ने की संक्रिया पर विचार करेंगे।

(अ) योग संक्रिया

हम जानते हैं कि अंकगणित में योग-संक्रिया में अंकों को यथास्थान जोड़ते हैं। बीजगणित में भी इसी प्रकार योगफल ज्ञात कर सकते हैं।

उदाहरण 1 : $3x^3 + x^2 - 7, 4x^4 + 5x - 2$ तथा $5x^2 - 8x + 6$ का योगफल ज्ञात कीजिए

हल :

x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
	3	1	0	−7
4	0	0	5	−2
		5	−8	6
4	3	6	−3	−3

अतः दिये गये व्यंजकों का योगफल $= 4x^4 + 3x^3 + 6x^2 - 3x - 3$ उत्तर

उदाहरण 2 : व्यंजकों $8x^4 - 6x^2 + 9, 10x^3 + 7x$ तथा $-2x^3 + 5x + 12$ का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल :

x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
8	0	−6	0	9
	10	0	7	0
	−2	0	5	12
8	8	−6	12	21

अतः अभीष्ट योगफल $= 8x^4 + 8x^3 - 6x^2 + 12x + 21$

विशेष - ध्यान दें, यहा आधार x अज्ञात है, अतः अंकगणित में संख्याओं का योग करते समय जो शुद्धांक (हासिल) लेते हैं, वैसा बीजगणित में व्यंजकों के योगफल में नहीं ले सकते।

(ब) घटाने की संक्रिया

योग संक्रिया की भाँति ही व्यंजकों के घटाने में भी यथा स्थान अंकों को घटाते हैं।

उदाहरण 1 : $(8x^3 + 5x^2 - 9x + 12)$ में से $(5x^3 + 7x + 7)$ को घटाइए।

हल :

x^3	x^2	x^1	x^0
8	5	−9	12
5	0	7	7
−	−	−	−
3	5	−16	5

अतः अभीष्ट अन्तरफल $3x^3 + 5x^2 - 16x + 5$ उत्तर

उदाहरण 2 : $(4x^3 - 7x + 8)$ में से $(2x^4 + 5x^2 - 9x)$ को घटाइए

हल :

x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
	4	0	−7	8
2	0	5	−9	0
−	−	−	+	−
−2	4	−5	+2	8

अतः अभीष्ट अन्तरफल $(-2x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 2x + 8)$ उत्तर

(स) मिश्रित गणनाएँ

उदाहरण : एक विद्यालय में कक्षा 8, कक्षा 7 एवं कक्षा 6 में पंजीकृत छात्र-छात्राओं की संख्या क्रमशः $(5x^2 + 7x + 11)$, $(4x^2 - 8x + 15)$ तथा $(6x^2 + 5x + 9)$ है। उपर्युक्त पंजीकृत सम्पूर्ण छात्र-छात्राओं में से किसी कार्य दिवस को कुल $(2x^2 - 3x + 6)$ छात्र-छात्राएँ अनुपस्थित थे, तो उस दिन उपस्थित छात्र-छात्राओं की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल :

x^2	x^1	x^0
5	7	11
4	−8	15
6	+5	+9
15	+4	+35

अतः कुल पंजीकृत छात्र-छात्राएँ $(15x^2 + 4x + 35)$ हैं। अब इनमें से $(2x^2 - 3x + 6)$ छात्र-छात्राएँ अनुपस्थित हैं, अतः घटाने की क्रिया कर उपस्थित छात्र छात्राओं की संख्या ज्ञात करेंगे।

अतः

x^2	x^1	x^0
15	4	35
2	−3	+6
−	+	−
13	7	29

अर्थात् $(13x^2 + 7x + 29)$ छात्र-छात्राएँ उपस्थित रहे। - उत्तर

17.4 विभाजनीयता के नियम (आवर्त दशमलव)

(1) 3, 7, 9 की विभाजनीयता

हम जानते हैं कि जिन भिन्नों के हर के गुणनखण्ड 2 और 5 के अतिरिक्त कोई अन्य अभाज्य संख्या या संख्याएँ होती हैं, उनको असांत आवर्ती दशमलव में बदल सकते हैं। वैदिक गणित में ऐसी भिन्नों जैसे ($\frac{1}{3}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{11}$) आदि को असांत आवर्ती दशमलव में बदलने के बड़े सरल नियम हैं। यहाँ हम इसी विधि को समझने का प्रयास करेंगे।

यदि आप असांत आवर्त दशमलव में परिवर्तित होने वाले भिन्न पर ध्यान दें तो आप पायेंगे कि ऐसे भिन्नों के हर के इकाई वाले अंक और उसे असांत आवर्ती दशमलव संख्या में बदलने पर प्राप्त आवर्ती दशमलव के अंतिम अंक का गुणनफल 9 अथवा गुणनफल का बीजांक 9 होगा।

उदाहरण 1 : $\frac{1}{6} = 0.1666.... = 0.1\dot{6}$

यहाँ आवर्ती दशमलव का अंतिम अंक $= 6$

भिन्न $\frac{1}{6}$ का इकाई वाला अंक $= 6$

अब $6 \times 6 = 36$ का बीजांक $= 3 + 6 = 9$

उदाहण 2 : $\frac{1}{7} = 0.\dot{1}4285\dot{7}$

स्पष्टतः भिन्न के हर की इकाई $= 7$

आवर्ती दशमलव का अंतिम अंक $= 7$

स्पष्टतः $7 \times 7 = 49$ का अंतिम अंक 9 है।

उपर्युक्त से यह स्पष्ट है किसी भिन्न के हर का अंतिम अंक (अर्थात् इकाई का अंक) 9 हो तो स्पष्टतः उसे आवर्ती दशमलव में बदलने पर आवर्ती दशमलव का अंतिम अंक अवश्य ही 1 होगा। अतः यदि $\frac{1}{3}$ और $\frac{1}{7}$ को ऐसी समतुल्य भिन्नों में बदल दें जिनके हर का अंतिम अंक 9 हो जाय तो फिर यह सुनिश्चित है कि उसके तुल्य आवर्ती दशमलव का अंतिम अंक 1 होगा (क्योंकि उसी दशा में भिन्न के अंतिम अंक 9 तथा आवर्ती के अंतिम अंक 1 का गुणनफल 9 के बराबर होगा।)

अतः यहाँ $\frac{1}{3}$ को $\frac{3}{9}$ तथा $\frac{1}{7}$ को $\frac{7}{49}$ में बदल देंगे।

प्रचालक -

अब हम ऐसी भिन्नों को आवर्ती दशमलव में बदलने के लिए एक कुंजी, जिसे हम 'प्रचालक संख्या' कहेंगे, 'एकाधिकेन पूर्वेण सूत्र' से ज्ञात करेंगे। जैसे $\frac{1}{3} = \frac{3}{9}$ में हर 9 है, उसके पूर्व का अंक 0 है अतः यहाँ प्रचालक = 0 + 1 = 1

अतः $\frac{3}{9}$ को आवर्ती दशमलव में बदलने के लिए प्रचालक 1 का भिन्न $\frac{3}{9}$ के अंश में दायें से बायें बढ़ने के क्रम में निरन्तर गुणा करते जायेंगे,

यथाः $\frac{3}{9}$ = ..., 3×1= 3, 3×1= 3, 3×1= 3,

अर्थात $\frac{3}{9} = 0.333.... = 0.\dot{3}$

अतः $\frac{3}{9} = \frac{1}{3} = 0.\dot{3}$

इसी प्रकार $\frac{1}{7} = \frac{7}{49}$ में हर 49 का 'एकाधिकेन पूर्वेण सूत्र' से प्रचालक = 4 +1 = 5

अतः 5 का $\frac{7}{49}$ के अंश में क्रमशः दायें से बायें के बढ़ते क्रम में गुणा करते जायेंगे।

यथाः $\frac{7}{49}$ के आवर्ती दशमलव का इकाई का अंक = 7

अब 7 में प्रचालक 5 का गुणा करने पर गुणनफल 7 × 5 = 35 प्राप्त हुआ अतः उक्त आवर्ती संख्या का इकाई के ठीक बायीं ओर का अंक 5 होग और 35 के दहाई वाला अंक अगले गुणनफल से प्राप्त संख्या में जोड़कर जो संख्या प्राप्त करेंगे, उसका इकाई वाला अंक आवर्ती संख्या का दायें से बायीं ओर का तीसरा अंक होगा। यहाँ

$\frac{7}{49} = 85\dot{7}$ (5×5 = 25, 25+3=28)

23

इसी प्रकार $\frac{7}{49} = 285\dot{7}$ (5×8 = 40, 40+2= 42)

423

पुनः $\frac{7}{49} = {}_{1}4_{4}2_{2}8_{3}5\dot{7}$ (5×2 = 10, 10+4 = 14)

पुनः $\qquad \dfrac{7}{49} = 14285\dot{7}$ $\qquad (5\times4 = 20,\ 20+1 = 21)$

$\qquad\qquad 21423$

पुनः $\qquad \dfrac{7}{49} = 714285\dot{7}$ $\qquad (5\times1 = 5,\ 5+2 = 7)$

$\qquad\qquad 21423$

ज्यों ही उपर्युक्त क्रिया के चरण में 7 का अंक, जो कि आवर्ती का सबसे अंतिम वाला अंक 7 है, प्राप्त होगा, अंकों की दायें से बायें के उसी क्रम में आवृत्ति होती जायेगी, अतः $\dfrac{1}{7} = \dfrac{7}{49} = 0.\dot{1}4285\dot{7}$

अब $\dfrac{1}{9}$ पर विचार करें। स्पष्टतः $\dfrac{1}{9}$ के आवर्ती दशमलव का अंतिम अंक 1 होगा तथा इसके हर का प्रचालक $= 0+1 = 1$

अतः $\dfrac{1}{9} = \dot{1}$ $\qquad$ (आवर्त दशमलव का अंतिम अंक)

यहाँ यह स्पष्ट है कि हम 1 में जब प्रचालक का गुणा करेंगे तो $1\times1 = 1$ ही प्राप्त होगा। अतः 1 के ठीक बायें का अंक भी 1 ही होगा। इसी प्रकार इसके ठीक बायें का अंक भी 1 ही होगा।

$$\therefore \qquad \frac{1}{9} = 0.111... = 0.\dot{1}$$

इसी प्रकार आप देख सकते हैं कि

$\dfrac{2}{9} = 0.\dot{2},\ \dfrac{4}{9} = 0.\dot{4},\ \dfrac{8}{9} = 0.\dot{8}$ आदि।

17.6 गुणा

वैदिक गणित में गुणा की विधियाँ अत्यन्त सरल हैं। आधार पद्धति का उपयोग कर गुणा अत्यन्त सरलतापूर्वक किया जा सकता है। हम देखते हैं कि आधार पद्धति है क्या ?

आधार पद्धति

आधार सदैव 10 की कोई घात या स्वयं 10 होता है। इस प्रकार आधार क्रमशः 10, 100, 1000, 10000,... होते हैं। यदि इन आधारों के समीप की दो संख्याओं का परस्पर गुणा करने हैं तो सर्वप्रथम हम "निखिलं सूत्र" का प्रयोग कर संख्याओं का आधार से विचलन ज्ञात करते हैं। यदि संख्या आधार से छोटी है तो विचलन ऋणात्मक होगा और यदि संख्या आधार से बड़ी है तो विचलन धनात्मक होगा।

उदाहरण : 107 का आधार 100 से विचलन 7 है क्योंकि 107 आधार 100 से 7 अधिक है। और 94 का आधार 100 से विलचन −6 होगा क्योंकि 94 आधार 100 से कम है। आधार से विचलन ज्ञात करने के लिए सूत्र "निखिलं नवतः चरमं दशतः" का प्रयोग करते हैं। सूत्र का अर्थ है - "प्रत्येक को 9 से और अंतिम को 10 से", यदि संख्या आधार से छोटी है। जैसे 985 का आधार 1000 से विचलन 9−9 = 0, 9−8 = 1, 10−5 = 5

अर्थात अभीष्ट विचलन 015 या 15 है।

इसी प्रकार 83 का आधार 100 से विचलन

9−8 = 1, 10−3 = 7 अर्थात् 17 है।

अब आधार पद्धति के प्रयोग से हम दो संख्याओं का परस्पर गुणा की क्रिया करते हैं।

उदाहरण 1 : 97 × 93

यहाँ आधार 100 है।

100 से 97 का विचलन 9−9 = 0, 10−7 = 3

अर्थात् −3

इसी प्रकार 93 का विचलन = −7

विचलन

अब

$$\begin{array}{cc} 97 & -3 \\ \times\, 93 & -7 \\ \hline \end{array}$$

$$90 \;/\; 00 + (-3) \times (-7)$$

अर्थात् 90/21 = 9021 उत्तर

क्रियाविधि

(1) सर्वप्रथम संख्याओं (गुण्य व गुणक) को आधार से विचलन के साथ उपर्युक्त जैसा लिखते हैं।

(2) संख्याओं का उपर्युक्त प्रदर्शित तिर्यक योग ज्ञात करते हैं, यथा

$97 + (-7) = 90$

या $93 + (-3) = 90$

इसकी शुद्धता की जाँच हम आधार 100 में विचलन वाली दोनों संख्याओं के योग को जोड़कर कर सकते हैं।

यथा $100 + \{(-7) + (-3)\}$

$= 100 - 10$

$= 90$

अब गुणनफल का प्रथम भाग 90 है तथा इसके आगे आधार में जितने शून्य हैं, उतने शून्य रख देते हैं

यथा 90/00

अब दायें भाग में विचलन का वास्तविक गुणनफल वाली संख्या का योग कर देते हैं, जैसा कि ऊपर किया गया है। इसी विधि का प्रयोग हम आगे सभी प्रश्नों में करेंगे।

उदाहरण 2 :

$$\begin{array}{rr} & \text{विचलन} \\ 112 & +12 \\ \times\ 96 & -4 \\ \hline \end{array} \qquad \text{(आधार 100 है)}$$

$$\begin{array}{r|l} 108 & 00 \\ & +\ (12) \times (-4) \end{array}$$

अर्थात्

$$\begin{array}{r} 10800 \\ -\quad 48 \\ \hline 10752 \end{array} \quad \text{उत्तर}$$

उदाहरण 3 -

$$\begin{array}{rr} & \text{विचलन} \\ 1002 & +2 \\ \times\ 1012 & +12 \\ \hline \end{array} \qquad \text{(आधार 1000)}$$

$$\begin{array}{r|l} 1014 & 000 \\ & +\ 24 \\ \hline \end{array}$$

$$1014024 \quad \text{उत्तर}$$

उदाहरण 4 - विचलन

$$\begin{array}{lr} 10025 & +25 \\ \times\ 10016 & +16 \\ \hline \end{array}$$

(आधार 10000)

$$\begin{array}{r|l} 10041 & 0000 \\ & +\ 400 \\ \hline \multicolumn{2}{c}{100410400} \end{array}$$

उत्तर

उदाहरण 5 - (आधार 10000) विचलन

$$\begin{array}{lr} 10008 & +8 \\ \times\ 9992 & -8 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 10000 & 0000 \\ & 00\,\bar{6}\,\bar{4} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{1000000\,\bar{6}\,\bar{4}} \end{array}$$

(विनकुलम)

$= 99999936$ उत्तर

अपवर्त्य तथा अपवर्तक

जब दो ऐसी संख्याओं का परस्पर गुणा करना होता है, जो आधार से बहुत दूर होती हैं तब "अनुरूप्येण" (अर्थात् अनुपात से) सूत्र का प्रयोग करते हैं और एक सुविधाजनक आधार का अपवर्तक या अपवर्त्य ज्ञात करते हैं।

उदाहरण 6 - (यहाँ आधार 10 का अपवर्त्य 20 है, अतः 20 से हम विचलन ज्ञात करेंगे।)

विचलन

$$\begin{array}{lr} 23 & +3 \\ \times\ 22 & +2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 25 & 0 \\ 25\times2 = 50 & +6 \end{array}$$

$= 506$ उत्तर

(ध्यान दें, $\therefore 20 = 10 \times 2$ इसीलिए 25 में 2 का गुणा कर गुणनफल का बायाँ पक्ष ज्ञात किया गया है।

उदाहरण 7 - उपाधार 50

उपाधार 50, आधार 100 का एक अपवर्तक है

और $50 = \frac{1}{2} \times 100$

विचलन

53		+3
$\times$ 47		−3
50		
$50 \times \frac{1}{2} = 25$		00
		−09
2491 उत्तर		

उदाहरण 8 :

यहाँ उपाधार 250= आधार 1000 का $\frac{1}{4}$ है।

विचलन (250 से)

251	+1
$\times$ 255	+5
256	

$256 \times \frac{1}{4}$

=	64	000
		+ 5
	64005	उत्तर

उत्तर की जाँच बीजांक से

गुण्य और गुणक के बीजांकों के गुणनफल का बीजांक, सदैव गुण्य और गुणक के गुणनफल के बीजांक के बराबर होता है। इस तथ्य के द्वारा हम गुणनफल की शुद्धता की जाँच सरलतापूर्वक कर सकते हैं जैसे उपर्युक्त उदाहरण (7) में,

गुण्य 53 का बीजांक $= 5 + 3 = 8$

गुणक 47 का बीजांक $= 4 + 7 = 11 = 1 + 1 = 2$

तथा गुणनफल 2491 का बीजांक $= 2 + 4 + 9 + 1 = 16 = 7$

स्पष्टतः गुण्य तथा गुणक के बीजांकों 8 एवं 2 का गुणनफल $= 8 \times 2 = 16$

अब 16 का बीजांक $= 1 + 6 = 7$

जो उपर्युक्त गुण्य एवं गुणक के गुणनफल के बीजांक 7 के तुल्य है।

अतः अभीष्ट गुणनफल शुद्ध है।

इसी प्रकार गुणनफल के किसी भी प्रश्न में हम उत्तर की जाँच "बीजांक विधि" से कर सकते हैं।

टिप्पणी - बीजांक विधि से हम योगफल, अन्तरफल, भागफल, वर्ग, वर्गमूल, घन तथा घनमूल आदि सभी की शुद्धता की जाँच कर सकते हैं।

17.7 पहाड़ा बनाना

विनकुलम के प्रयोग से हम संख्याओं का पहाड़ा भी लिख सकते हैं। यहाँ तक कि केवल 10 स्तर तक ही नहीं, मनोवांछित स्तर तक

उदाहरण - 19 का पहाड़ा

$$19 = 20 - 1 = 2\bar{1}$$

प्रथम स्तर	---	$2\bar{1}$	=	$20 - 1$	=	19
द्वितीय स्तर	---	$4\bar{2}$	=	$40 - 2$	=	38
तृतीय स्तर	---	$6\bar{3}$	=	$60 - 3$	=	57
चतुर्थ स्तर	---	$8\bar{4}$	=	$80 - 4$	=	76
पंचम स्तर	---	$10\bar{5}$	=	$100 - 5$	=	95
षष्ठम स्तर	---	$12\bar{6}$	=	$120 - 6$	=	114
सप्तम स्तर	---	$14\bar{7}$	=	$140 - 7$	=	133
अष्टम स्तर	---	$16\bar{8}$	=	$160 - 8$	=	152
नवम स्तर	---	$18\bar{9}$	=	$180 - 9$	=	171
दशम स्तर	---	$2\bar{1}0$	=	$200 - 10$	=	190

ग्यारहवाँ स्तर ---	$2\,1\,\bar{1}$	=	210 − 1	=	209
बारहवाँ स्तर ---	$2\,3\,\bar{2}$	=	230 − 2	=	228

उदाहरण - 89 का पहाड़ा

$89 = 100 - 10 - 1 = 1\,\bar{1}\,\bar{1}$

प्रथम स्तर ---	$1\,\bar{1}\,\bar{1}$	=	100 − 11	=	89
द्वितीय स्तर ---	$2\,\bar{2}\,\bar{2}$	=	200 − 22	=	178
तृतीय स्तर ---	$3\,\bar{3}\,\bar{3}$	=	300 − 33	=	267
चतुर्थ स्तर ---	$4\,\bar{4}\,\bar{4}$	=	400 − 44	=	356
पंचम स्तर ---	$5\,\bar{5}\,\bar{5}$	=	500 − 55	=	445
षष्ठम स्तर ---	$6\,\bar{6}\,\bar{6}$	=	600 − 66	=	534
सप्तम स्तर ---	$7\,\bar{7}\,\bar{7}$	=	700 − 77	=	623
अष्टम स्तर ---	$8\,\bar{8}\,\bar{8}$	=	800 − 88	=	712
नवम स्तर ---	$9\,\bar{9}\,\bar{9}$	=	900 − 99	=	801
दशम स्तर ---	$1\,\bar{1}\,\bar{1}\,0$	=	1000 − 110	=	890
ग्यारहवाँ स्तर ---	$10\,\bar{2}\,\bar{1}$	=	1000 − 21	=	979
बारहवाँ स्तर ---	$11\,\bar{3}\,\bar{2}$	=	1000 − 32	=	1068

इसी प्रकार विनकुलम के सिद्धान्त से कोई भी पहाड़ा (तालिका) बिना किसी कठिनाई के लिख सकते हैं।

विशेष : गणित में योग, घटाना, गुणा एवं भाग इत्यादि में विनकुलम का प्रयोग करने से परिकलन सरल बन जाता है।

उदाहरण 1 :

$$\begin{array}{r} 5\,\bar{3}\,\bar{2}\,\bar{4} \\ +\;6\,\bar{5}\,\bar{6}\,9 \\ \hline 1\,1\,\bar{8}\,\bar{8}\,5 \\ \hline \end{array} = 10125 \text{ उत्तर}$$

उदाहरण 2 :

$$\begin{array}{r} 2\bar{5}4\bar{7}4 \\ +\;6\bar{3}21 \\ \hline 211\bar{5}5 \\ \hline \end{array} = 21055 \text{ उत्तर}$$

भारतीय गणितज्ञ एवं उनकी महान् कृतियाँ

क्रम	नाम	काल	कृतियाँ
1	बौधायन	800 ई. पू.	बौधयन शुल्क सूत्र
2	आर्यभट प्रथम	476 ई.	आर्यभटीय (499 ई.)
3	वराह मिहिर	505ई. - 587 ई.	वृहज्जातक, वृहत् संहिता, पंच सिद्धान्तिका
4	ब्रह्मगुप्त	598ई.	''ब्राह्मस्फुट - सिद्धान्त'' (628 ई.) खण्ड खाद्यक
5	भास्कराचार्य प्रथम	629ई.	महाभास्करीय, लघु भास्करीय
6	महावीराचार्य	850ई.	गणितसार संग्रह
7	आर्यभट्ट द्वितीय	950 ई.	महाआर्यभट्टीय, महाआर्य सिद्धान्त
8.	श्रीधराचार्य	991 ई.	गणितसार (त्रिशतिका), जातक-तिलक
9	श्रीपति मिश्र	1039 ई.	पाटीगणित, बीजगणित, सिद्धान्त शेखर
10	नेमीचन्द्र सिद्धान्त चक्रवर्ती	11वीं शती	गोम्मटसार
11	भास्कराचार्य द्वितीय	1114ई.1185ई.	सिद्धान्त शिरोमणि, लीलावती, करण-कुतूहल
12	नारायण पण्डित	1356 ई.	गणित कौमुदी
13	नीलकण्ठ	1356 ई.	ताजिकनीलकण्ठी
14	कमलाकर	1608 ई.	सिद्धान्त तल विवेक
15	सम्राट जगन्नाथ	1731 ई	सम्राट सिद्धान्त, रेखागणित
16	नृसिंह बापूदेव शास्त्री	1831 ई.	रेखागणित, त्रिकोणमिति, अंकगणित
17	श्री निवास रामानुजन	1887 ई.	रामानुजन की डायरी
18	स्वामी भारती कृष्ण तीर्थ जी	1884 ई.	वैदिक गणित
19	सुधाकर द्विवेदी	1860ई.-1922ई.	गोलीय रेखागणित
20	डॉ. गणेश प्रसाद	1876ई.-1935ई.	मैथेमेटिकल फिजिक्स ऐण्ड डिफरेंशियल इक्वेशन्स ऐट दबिगिनिंग ऑफ द ट्वान्टयथ सेन्युरी
21	शकुन्तला देवी (मानव कम्प्यूटर	जन्मतिथि 4.11.1929	शकुन्तला देवीज़ द बुक ऑफ नम्बर्स, शकुन्तला देवी मोर पज़ल्स

इन्हे भी जानें

मूलांक के चमत्कार

भारतीय गणितज्ञों ने अपने गणितीय ग्रंथो में जोड़-घटाना, गुणा-भाग एवं वर्गमूल-घनमूल जैसी संक्रियाओं की विधियाँ बताने के साथ ही मूलांक का प्रयोग करके इन संक्रियाओं की शुद्धता के परीक्षण का अनोखा ज्ञान दिया है।

मूलांक

किसी भी संख्या का मूलांक ज्ञात करने के लिए उस संख्या के अंकों को तब तक जोड़ते जाइए जब तक कि योगफल मूल अंकों 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 में से किसी एक के रूप का न हो जाय। मूलांक 9 को 0 (शून्य) भी मानते हैं। मूलांक की गणना निम्न उदाहरण के द्वारा स्पष्ट की गयी है-

उदाहरण 1- 830896517 का मूलांक ज्ञात कीजिए।

हल - दी हुई संख्या के अंकों का योगफल

$= 8 + 3 + 0 + 8 + 9 + 6 + 5 + 1 + 7 = 47$

$= 47 = 4 + 7 = 11 = 1 + 1 = 2$

अतः दी गयी संख्या का मूलांक 2 है।

अतः मूलांक की सहायता से योग, व्यवकलन (घटाना), गुणन, भाग, वर्ग, घन, वर्गमूल तथा घनमूल की जाँच करना निम्न उदाहरणों के द्वारा सीखेंगे-

उदाहरण 2- संख्याओं 17526, 1493 का योगफल ज्ञात कीजिए और उत्तर की जाँच कीजिए-

हल -

	मूलांक			योग
17526	3	1+7+5+2+6 =	21 = 2 + 1 = 3	3 + 8 = 11 = 2
+1493	8	1+4+9+3 =	17 = 1 + 7 = 8	
19019	2	1+9+0+1+9 =	20 = 2 + 0 = 2	

उदाहरण 3- 42307 में से 29568 को घटाइए और उत्तर की जाँच कीजिए-

हल -

	मूलांक
42307	7
- 29568	3
12739	4